

Feuille d'exercices n° 6

CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E .
2. Montrer que f est continue sur U et V .
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$.

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On considère l'application distance à A , $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

1. Montrer que d_A est continue.
2. On suppose désormais que A est une partie compacte de E . Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

Exercice 3. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Pour $c \in [0; 1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : E \rightarrow \mathbb{R}$.
 $f \mapsto f(c)$

Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

2. Soit $\mu : E \rightarrow E$ telle que pour tout $x \in [0; 1]$, on ait $\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.
 $f \mapsto \mu(f)$

- (a) Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
- (b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1 - t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
 Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ .

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) . \\ P \longmapsto P(c)$$

Montrer que la forme linéaire ϕ_c est continue si et seulement si $c \in]-1; 1[$. Dans ce cas, déterminer la norme de ϕ_c .

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E .

1. Montrer que $x \in E \mapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E .
2. En déduire que f est continue.

Exercice 6. On fixe un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C \int_{-1}^1 P(x)^2 dx.$$