Feuille d'exercices 6

Calculs d'intégrales et de primitives

1 Calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 8.1. Calculer :

$$a.\ \int \ln x\,dx \qquad b.\ \int \operatorname{Arctan} x\,dx \qquad c.\ \int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,dx \qquad d.\ \int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Exercice 8.2. Calculer :

$$a.\ \int xe^{1+x^2}\,dx \qquad b.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \qquad c.\ \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$$

Exercice 8.3.

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\,d\varphi.$$

3. Le résultat de la première question est-il vrai ou faux si l'on suppose seulement f continue par morceaux ? Donner une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 8.4. Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ b. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ c. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx$ d. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx$

e. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ f. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,dx$ g. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$ h. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,dx$

i. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{500}(x-1)}$ j. $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^4(x-1)^3}\,dx$ k. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ l. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2014}\frac{dx}{x^2}$

m. $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{x^4+x^2+1}\,dx$ n. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx$ o. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ p. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,dx$

q. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}\,dx$ r. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx$ s. $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx$ t. $\displaystyle\int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx$

Exercice 8.5. En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

Exercice 8.6. Calculer :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ (poser $t = e^{-x}$) b. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$) c. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)

d. $\displaystyle\int x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t = x^3$) e. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ f. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Exercice 8.7. Calculer la dérivée $\dfrac{d}{d\varphi}[\ln(|\tan\varphi|)]$. En déduire :

a. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}$ b. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$ c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

2 Encore des calculs d'intégrales

Exercice 8.8. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 (2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$

5. Montrer que $\dfrac{2^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire que $1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}$ tend vers e^2 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.9. Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

a. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}$ *b.* $\displaystyle\int (\operatorname{Arcsin} x)^2\,dx$ *c.* $\displaystyle\int \frac{dt}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}$ *d.* $\displaystyle\int \ln(x^2+2)\,dx$

e. $\displaystyle\int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *f.* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ *g.* $\displaystyle\int \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$ *h.* $\displaystyle\int \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,dt$

i. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\,dx$