Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 6

ESPACES AFFINES

I. Espaces affines

Exercice 1. Milieu. Soient A et B deux points d'un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que, pour un point C de $\mathcal{E}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

(ii) $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{A, B\}$.

Exercice 2. Parallélogramme. Montrer que, pour quatre points A, B, C et D d'un $\mathbb{R}$-espace affine, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(iii) Les milieux de $\{A, C\}$ et $\{D, B\}$ coincident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants on dit que $ABCD$ est un parallélogramme. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas indépendants, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati.

Exercice 3. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient f, g dans E_1. Les éléments $f + g$, $f - g$, $\dfrac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?
3. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel directeur E_0.

II. Sous-espaces affines

Exercice 4. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ vu comme espace affine.

1. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y + 4 = 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. Quel est son espace directeur ? Sa dimension ?
2. Trouver un sous-espace affine différent de $\mathcal{D}$ ayant le même espace directeur.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ est le sous-espace affine engendré par une partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

Exercice 5. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner un sous-espace vectoriel F de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $M = (a, b, c)$ un point de $\mathbb{R}^3$ vu comme espace affine. Donner une équation cartésienne du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par M et de direction F.

Exercice 6. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 7. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soient (u, v, w) une base de $\overrightarrow{E}$, A un point de E et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par u.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un unique plan passant par M_λ et contenant D. On le notera $\mathcal{P}_\lambda$.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\lambda$ décrit tous les plans contenant $\mathcal{D}$ sauf un. On le note $\mathcal{P}_\infty$. Déterminer la direction de $\mathcal{P}_\infty$ en fonction de u, v, w.