Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 6

CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 1. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x-a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E.
2. Montrer que f est continue sur U et V.
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$. Plus généralement, soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| = \|a\|$, la fonction f est-elle continue en a ?

Exercice 2. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On considère l'application distance à A, $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}.$$

1. Soient $x, y \in E$. Montrer que, pour tout $a \in A$, $\|x-a\| - \|x-y\| \leq \|y-a\|$.
2. En déduire que d_A est une application lipschitzienne (donc continue).
3. On suppose désormais que A est une partie compacte de E. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x-a\|$.

Exercice 3. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$.

1. Pour $c \in [0;1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$.
   Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.
2. Soit $\mu : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, on ait $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
   (b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi_c : & (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ & P & \longmapsto & P(c) \end{array} .$$

1. On suppose dans cette question que $c \in]-1;1[$.
   (a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|\phi_c(P)| \leq \dfrac{1}{1-|c|}\|P\|_\infty$. En déduire que ϕ_c est continue.
   (b) Supposons $c \in [0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Calculer $\phi_c(P_n)$ et en déduire la norme subordonnée de ϕ_c.
   (c) On suppose désormais $c \in]-1;0[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $Q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$. Calculer $\phi_c(Q_n)$ et en déduire la norme subordonnée de ϕ_c.
2. Montrer que ϕ_c n'est pas continue si $c \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\ \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 6. On fixe un entier naturel n non nul. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C \int_{-1}^{1} P(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$