

---

Feuille d'exercices n° 5

NOMBRES COMPLEXES

---

**Exercice 1.**

1. Calculer le module et un argument de  $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ .
2. Écrire sous forme trigonométrique  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ .

**Exercice 2.** On note  $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1+i$  puis l'on définit  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ .

1. Écrire  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

**Exercice 3.**

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , déterminer une forme trigonométrique de  $(1+i)^n$ .
2. En déduire pour tout  $n \in \mathbf{N}$  une expression simple de  $(1+i)^n + (1-i)^n$ .

**Exercice 4.**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes.
  - (a) Montrer que  $\operatorname{Re}(\bar{a}b) = \operatorname{Re}(\bar{b}a)$ .
  - (b) Exprimer  $\operatorname{Re}(\bar{a}b)$  à l'aide de formes trigonométriques de  $a$  et  $b$ , puis à l'aide des formes algébriques de  $a$  et  $b$ .
  - (c) Montrer que  $|\operatorname{Re}(\bar{a}b)| \leq |a||b|$ .
  - (d) Déterminer le cas d'égalité dans l'inégalité précédente et l'exprimer à l'aide de formes trigonométriques de  $a$  et  $b$ .
  - (e) Montrer que

$$|a+b|^2 = |a|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}b) + |b|^2.$$

- (f) Démontrer l'identité du parallélogramme

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

2. Montrer que, pour tout  $(a, b, z) \in \mathbf{C}^3$ , on a :

$$|z-a|^2 \leq |z-b|^2 \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{Re}\left(\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)}(b-a)\right) \leq 0.$$

**Exercice 5.** On rappelle l'identification canonique de  $\mathbf{R}^2$  et de  $\mathbf{C}$  par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array} .$$

1. Rappeler l'effet sur  $\mathbf{C}$  des transformations du plan suivantes :
  - (a) pour  $a \in \mathbf{C}$ , la translation du vecteur d'affixe  $a$  ;
  - (b) pour  $(a, \lambda) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ , l'homothétie de rapport  $\lambda$  et de centre d'affixe  $a$  ;
  - (c) pour  $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ , la rotation d'angle  $\theta$  et de centre d'affixe  $a$  ;
  - (d) pour  $(a, \theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ , la symétrie par rapport à un axe formant un angle  $\theta$  avec l'axe réel et passant par un point d'affixe  $a$ .
2. Déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
  - (a)  $\varphi_1 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 3$ .
  - (b)  $\varphi_2 : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto i\bar{z}$ .
3. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
4. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

**Exercice 6.** On note  $A$  le point d'affixe  $4 + 2i$  et  $O$  celui d'affixe 0.

Calculer les affixes des points  $B$  tels que le triangle  $OAB$  soit équilatéral.

**Exercice 7.** Déterminer l'ensemble des  $z \in \mathbf{C}$  tels que soient alignés les points d'affixes  $z, iz$  et  $i$ .

**Exercice 8.**

1. Pour tout  $z \in \mathbf{C}^*$ , exprimer  $1/z$  sous forme algébrique.
2. Pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et tout  $(c, d) \in \mathbf{R}^2$ , déterminer l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases} .$$

**Exercice 9.** Réduction de  $a \cos x + b \sin x$ .

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Démontrer qu'il existe  $r \in \mathbf{R}_+$  et  $\theta \in \mathbf{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$

2. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbf{R}$  qui vérifient  $\cos x + \sin x = 1$ .

**Exercice 10.**

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , exprimer, pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ .  
Indication : utiliser la formule du binôme de Newton.
2. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  impair, exprimer, pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\cos(n\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  en fonction de  $\sin(\theta)$ .
3. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  pair. Exprimer, pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $\cos(n\theta)$  en fonction de  $\cos(\theta)$ , et faire de même en fonction de  $\sin(\theta)$ .

**Exercice 11.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , calculer

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) .$$

**Exercice 12.** Récrire, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , l'expression  $(\cos 5x)(\sin 3x)$  comme combinaison linéaire de cosinus et de sinus.

**Exercice 13.** Déterminer algébriquement les racines carrées respectives de  $7 + 24i$  et  $9 + 40i$ .

**Exercice 14.**

1. Résoudre algébriquement en  $z \in \mathbf{C}$  l'équation  $z^2 = (1 + i)$ .
2. En déduire des expressions de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

**Exercice 15.** Résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  les équations suivantes :

1.  $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$ ;
2.  $z^2 + 3z + 3 = 0$ ;
3.  $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ .

**Exercice 16.** On cherche à résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  l'équation

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0 .$$

1. Déterminer une racine réelle  $z_0$  de l'équation.
2. Pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , factoriser  $z - z_0$  en  $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ .
3. Résoudre l'équation en  $z \in \mathbf{C}$ .

**Exercice 17.** Résoudre en  $z \in \mathbf{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^3 = -8i$ ;
2.  $z^5 - z = 0$ ;
3.  $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$ ;
4.  $z^2 \bar{z}^7 = 1$ ;
5.  $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$ .

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

1. On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$ .
2. Calculer la somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

**Exercice 19.** Décrire les ensembles suivants :

1.  $\{ z \in \mathbf{C} \mid z^2 + 2z - 3 \in \mathbf{R} \}$ ;

2.  $\left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-3\} \mid \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 \right\}$ ;

3.  $\left\{ z \in \mathbf{C}^* \mid \left| 1 - \frac{1}{z} \right|^2 = 2 \right\}$ .