

---

**Feuille d'exercices n° 5**  
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

---

## 1 Applications linéaires continues

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour toute fonction  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on note  $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ .

1. Montrer que  $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel et que  $\|\cdot\|$  est une norme de  $E$ .
2. Soit  $\Phi : E \ni g \mapsto (g \circ f) \in E$ , avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application fixée. Montrer que  $\Phi$  est une application linéaire continue.

## 2 Fonctions de plusieurs variables réelles : limite et continuité

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$ . Étudier la limite pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de la restriction de  $f$  aux droites d'équation  $y = mx$ , avec  $m \in \mathbb{R}$ . En déduire que  $f$  n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de la restriction de  $f$  aux droites d'équation  $y = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$  donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de  $f$  à la parabole d'équation  $y = x^2$ .
3. Montrer que  $f$  n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 4.** Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)); \quad (C) \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x, y) = \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en  $(0, 0)$  :

- deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,
- une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,
- (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
- si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

**Exercice 5.** Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ .

**Exercice 6.** Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  et  $(x, y)$  appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^{1/3} y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|},$$

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}, \quad f(x, y) = x^y$$

## Utilisation des coordonnées polaires

### Rappel.

Soit  $g: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . Supposons que pour tout  $\theta$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho, \theta) = \ell$ .

Supposons la limite uniforme en  $\theta$  :

$$\text{il existe } G: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} |g(\rho, \theta) - \ell| \leq G(\rho), & \forall \rho > 0, \forall \theta \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Sous ces conditions, si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = g(\rho, \theta)$  alors  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$ .

**Exercice 7.** Pour chacune des fonctions  $g: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes, calculer  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho, \theta)$ . On précisera si :

1. La limite est indépendante de  $\theta$ .
2. La limite est uniforme pour  $\theta \in [0, 2\pi[$

$$g(\rho, \theta) = \frac{\rho}{\sin \theta + 3}, \quad g(\rho, \theta) = \begin{cases} \rho \ln(\rho \sin(\theta)), & \text{si } \theta \in ]0, \pi[ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de la fonction  $f(x, y)$  telle que  $f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = g(\rho, \theta)$ .

**Exercice 8.** Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}.$$

**Exercice 9.** En utilisant les coordonnées polaires, calculer les limites pour  $(x, y) \rightarrow \infty$  des fonctions suivantes

$$f(x, y) = \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2},$$

$$f(x, y) = (1 + |x| + |y|) \sin(y^2), \quad f(x, y) = ye^x + \ln |y|.$$

**Exercice 10.** Soient  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  deux applications continues.

1. Montrer que  $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(x)\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .
2. On suppose  $m = 1$ , montrer que  $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .
3. On suppose  $m = 1$ , montrer que  $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < g(x)\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 11.** Soient  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$ .
3. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall q \in \mathbb{Q}, f(qx) = qf(x)$ .
4. En déduire que  $f$  est une application linéaire.