
Feuille d'exercices n° 5
TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Ouverts et fermés

Exercice 1. Les parties suivantes de \mathbb{R}^n sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$,
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 2\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$,
5. $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq 5\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Démontrer que \mathbb{Z} est une partie fermée de \mathbb{R} :

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
2. Soit $U = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$
 - (a) Soit $f \in U$.
 - i. Justifier l'existence du minimum de f , que l'on notera m .
 - ii. Représenter graphiquement la boule ouverte de centre f et de rayon m .
 - (b) Montrer que U est un ouvert de E .

II. Intérieur, adhérence et densité

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E , on note $\overset{\circ}{X}$ l'intérieur de X et \overline{X} l'adhérence de X . Soient A, B deux parties de E .

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(A \overset{\circ}{\cap} B)$ et $\overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{B}$, puis les ensembles $(A \overset{\circ}{\cup} B)$ et $\overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cup} \overset{\circ}{B}$.
3. Comparer les ensembles $\overline{A \overset{\circ}{\cap} B}$ et $\overline{A} \overset{\circ}{\cap} \overline{B}$, puis les ensembles $\overline{A \overset{\circ}{\cup} B}$ et $\overline{A} \overset{\circ}{\cup} \overline{B}$.

Exercice 5. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, & C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y + 1\}, \\ G &= \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}, & (*) B &= \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}. \end{aligned}$$

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ et on note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais qu'il est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

(a) Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f_n(t) = ntg\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right], f_n(t) = g(t).$$

Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\|\cdot\|_1$.

(c) Conclure.

III. Compacts

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$,

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$,

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 = 2\}$,

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$,

5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$.

Exercice 8. On considère $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(x) = e^{inx}$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

1. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n - f_p\|_2$.

2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E et calculer $\|g_n - g_p\|_2$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que $\overline{B}(0_E, 1)$ de E n'est pas compacte.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E . On définit $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E .

2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.

3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de \mathbb{R}^2 mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercice 10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.

Pour s'entraîner :

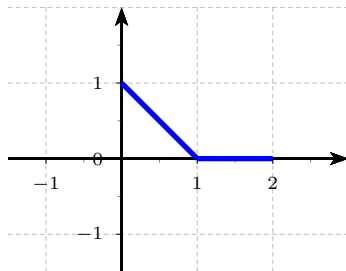
Exercice 11. Dans l'exercice, on identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées afin de ne pas alourdir les notations. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ que l'on munit des trois normes N_1, N_2, N_3 définies par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E, \quad N_1(P) = \sup_{t \in [0; 1]} |P(t)|, \quad N_2(P) = \sup_{t \in [1; 2]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_3(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

avec seulement un nombre fini de coefficients a_k non nuls. On pose $\Omega = \{P \in E \mid P(0) \neq 1\}$ et on note Ω^c son complémentaire dans E .

1. Montrer que Ω est un ouvert de E pour N_1 .

2. On considère la fonction f affine par morceaux qui vaut 1 en 0, est nulle sur $[1; 2]$ et est représentée par le graphe suivant :



On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément¹ vers f sur $[0; 2]$.

- Montrer que $N_2(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $P_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
 - À l'aide de la suite $(P_n)_n$, construire une suite d'éléments de Ω^c qui converge vers le polynôme nul pour N_2 .
 - En déduire que Ω n'est pas un ouvert de E pour N_2 .
 - Que peut-on en déduire sur les normes N_1 et N_2 ?
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est un fermé de E pour N_3 .

Pour aller plus loin :

Exercice 12. Notons E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_n \in E, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

- On note A l'ensemble des suites croissantes de E .
 - Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_k(n))_k$ converge vers $x(n)$.
 - En déduire que l'ensemble A est un fermé.
- On note C l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $x_k \in C$ définie par

$$x_k(n) = \frac{1}{n+1} \text{ si } n \leq k \quad \text{et} \quad x_k(n) = 0 \text{ si } n > k.$$

Montrer que la suite $(x_k)_k$ converge vers la suite $x = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$.

- L'ensemble C est-il fermé ?

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

- Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$. En déduire les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts.
- On considère un hyperplan H de E c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe alors $a \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .

1. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.