Feuille d'exercices n° 5

Topologie des espaces vectoriels normés

I. Ouverts et fermés

Exercice 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. $]a;b]$ et $[a;+\infty[$ pour a et b réels tels que $a<b$,
2. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$,
3. $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq x\leq z\}$,
4. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|\leq 2\}$,
5. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ et } y\in\mathbb{Q}\}$,
6. $E=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid x_1^2+\cdots+x_p^2\leq 5\}$ où $p\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0\in E$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} t & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0+u \end{array}$$

1. Montrer que si $U\subset E$ est une partie ouverte, alors $t(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F\subset E$ est une partie fermée, alors $t(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 3. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

1. Montrer que $F=\{f\in E \mid \forall x\in[0;1], f(x)\geq 0\}$ est un fermé de E.
2. Soit $U=\{f\in E \mid \forall x\in[0;1], f(x)>0\}$
   (a) Soit $f\in U$.
      i. Justifier l'existence du minimum de f, que l'on notera m.
      ii. Représenter graphiquement la boule ouverte de centre f et de rayon m.
   (b) Montrer que U est un ouvert de E.

Exercice 5. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit E de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par :

$$\forall u=(u_n)_n\in E,\quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,.$$

1. On note A l'ensemble des suites croissantes de E.

(a) Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_k(n))_k$ converge vers $x(n)$.

(b) En déduire que l'ensemble A est un fermé.

2. On note C l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $x_k \in C$ définie par

$$x_k(n) = \frac{1}{n+1} \text{ si } n \leq k \quad \text{et} \quad x_k(n) = 0 \text{ si } n > k.$$

Montrer que la suite $(x_k)_k$ converge vers la suite $x = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$.

(b) L'ensemble C est-il fermé ?

II. Intérieur, adhérence et densité

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

Exercice 7. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note $\mathring{X}$ l'intérieur de X et $\overline{X}$ l'adhérence de X. Soient A, B deux parties de E.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(A \overset{\circ}{\cap} B)$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$, puis les ensembles $(A \overset{\circ}{\cup} B)$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.
3. Comparer les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis les ensembles $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et on note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_1$ mais qu'il est dense dans $(E, \| \, . \, \|_1)$.

(a) Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f_n(t) = ntg\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right], \quad f_n(t) = g(t).$$

Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\| \, . \, \|_1$.

(c) Conclure.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$. En déduire les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts.
3. On considère un hyperplan H de E c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe alors $a \in E \backslash H$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.

III. Compacts

Exercice 11. Déterminer si les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 = 2\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$.

Exercice 12. On considère $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \,.\, \|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{inx}$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

1. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n - f_p\|_2$.
2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E et calculer $\|g_n - g_p\|_2$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\overline{B}(0_E, 1)$ de E n'est pas compacte.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 14. Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.