Feuille d'exercices n^{o} 5

Séries entières

Exercice 1. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes (pour $z \in \mathbb{C}$) :

1. $\sum (-1)^n (n+3)!\ z^n$,
2. $\sum n^n z^n$,
3. $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
4. $\sum \dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
5. $\sum (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
6. $\sum \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5} z^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Rayon de convergence

soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 3. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \dfrac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \dfrac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

Exercice 4. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 5. Vrai ou Faux

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? On donnera une démonstration si elles sont vraies ou un contre-exemple si elles sont fausses.

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 6. Série entière, calcul explicite

Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice 7. Séries entières et équation différentielle

Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0. \tag{1}$$

Calculer le rayon des séries entières obtenues.

Exercice 8. Série entière et équation différentielle On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad f''(x) - 4f(x) = 0. \tag{2}$$

On cherche f sous la forme d'une série entière : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 9. Série entière et équation différentielle

On cherche le développement en série entière de $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{3}$$
(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)
2. Déterminer les solutions de (3) développables en séries entières et préciser leur rayon de convergence.
3. Montrer que si g est solution de l'équation (3) sur un intervalle I contenu dans $]-1; +\infty[$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = C(1+x)^\alpha$.

Exercice 10. Série de Taylor

Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Série de Taylor

Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !** On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 12. Développements en série entière

Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x-5}$,
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+9x^2}$,
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$,
4. $x \longmapsto \ln(5-x)$.
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{(2+x)^3}$,
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$,
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2x(\cos\alpha)+1}$ pour $\alpha \in]0, \pi[$ fixé,
9. $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$,
10. $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 13. Développements en série entière en un point différent de 0

Développer en série entière els fonctions suivantes au point donné :

1. $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 puis en 2,
2. $x \longmapsto \sin(x)$ en $\pi/4$,
3. $x \longmapsto e^x$ en $x_0 \in \mathbb{R}$,
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ en 2.

Exercice 14. Pour $n \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f_n(x) = e^{-n}\cos(n^2x),$$

puis on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions qui définit f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et en particulier que, pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} n^{4k}.$$

En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul.

Exercice 15. Examen Janvier 2010

Montrer que l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$$

admet une unique solution développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 16. Examen Décembre 2007

1. On considère l'équation différentielle
$$xy'' + 2y' + w^2xy = 0 \tag{4}$$
où $w \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière autour de 0 solution de (4) et vérifiant la condition $f(0) = 1$. Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.
   (b) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

   N.B. : Pour les question (a) et(b), il sera conseillé de discuter des cas $w = 0$ ou non.
2. Déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 17. Examen Janvier 2009

1. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}*$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$.
   (a) Justifier l'existence et calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Justifier la dérivabilité de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a, b]$ où $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a < b$.
   (c) Calculer alors la somme de cette série pour $x > 0$.
2. Trouver le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est donnée par :
   (a) $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$, $\forall n \geq 0$,
   (b) $a_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$, $\forall n \geq 1$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   Indication : on pourra d'abord regarder le cas où $|z| < 1$, puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.
3. On considère l'équation différentielle suivante
$$xy'' + 3y' - 4x^3y = 0 \tag{5}$$
   (a) Montrer qu'il existe une unique solution f de (5), développable en série entière autour de 0 et telle que $f(0) = 1$.
   (b) Exprimer f à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 18. Attention au rayon ! !

Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières (au voisinage de 0) de l'équation différentielle
$$(E) : \quad x^2y' + y = x.$$

Exercice 19. Applications des séries entières

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\mathrm{sinc}(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Établir l'égalité :
$$\int_0^\pi \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$