Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de Printemps 2013-2014
Math IV - PMI

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5
SÉRIES ENTIÈRES

Exercice I : Rayon de convergence
Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$) :

1. $\sum (-1)^n (n+3)!\, z^n$,
2. $\sum n^n z^n$,
3. $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
4. $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
5. $\sum (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
6. $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5} z^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice II : Rayon de convergence
soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice III : Rayon de convergence
Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

Exercice IV : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice V : Vrai ou Faux

Vrai ou faux ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice VI : Série entière, calcul explicite

Calculer le rayon de convergence et la somme de

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice VII : Séries entières et équation différentielle

Déterminer les séries entières solutions de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0. \tag{1}$$

Calculer le rayon des séries entières obtenues.

Exercice VIII : Série entière et équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$f''(x) - 4f(x) = 0. \tag{2}$$

On cherche f sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice IX : Série entière et équation différentielle
On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{3}$$
(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)
2. Déterminer les solutions de (3) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.
3. Montrer que si g est solution de l'équation (3) sur un intervalle I ne contenant pas -1 alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = C(1+x)^\alpha$.

Exercice X : Série de Taylor
Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice XI : Série de Taylor
Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**
On considère la fonction
$$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right. \end{array} \tag{4}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice XII : Série entière et rayon de convergence
Développer en série entière autour de 0 et déterminer les rayons de convergence :

1. $\dfrac{1}{x-5}$,
2. $\dfrac{1}{1+9x^2}$,
3. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$,
4. $\ln(5-x)$.
5. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$,
6. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$,

7. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
8. $\dfrac{1}{x^2-2x(cos\alpha)+1}$ pour $\alpha \in]0,\pi[$ fixé.

Exercice XIII
Développer $\ln(x)$ en série entière autour de 1, autour de 2, et $\sin(x)$ autour de $\pi/4$.

Exercice XIV
Pour $n \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f_n(x) = e^{-n}cos(n^2x),$$

puis on pose

$$f(x) = \sum_n f_n(x).$$

1. Montrer que la série de fonctions qui définit f converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme f est de classe C^∞, et en particulier que, pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} e^{-n}n^{4k}.$$

En utilisant la formule de Stirling, montrer que la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul.

Exercice XV : Examen Janvier 2010

1. Montrer que l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$$

admet une unique solution développable en série entière.

2. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Exercice XVI : Examen Décembre 2007

1. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' + w^2xy = 0 \tag{5}$$

où $w \in \mathbb{R}$.

a. Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière autour de 0 (c'est à dire sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$) solution de (5) et vérifiant la condition $f(0) = 1$.

b. Calculer son rayon de convergence.

c. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

N.B. : Pour les question a. et b., il sera conseillé de discuter des cas $w = 0$ ou non.

2. Quelle est la nature de convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$?

Exercice XVII : Examen Janvier 2009

1. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}*$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$.

   a. Calculer $S(x) = \sum_n u_n(x)$ pour $x > 0$.

   b. Montrer que la série $\sum_n u_n'(t)$ converge normalement sur un intervalle $[a, b]$ où a, $b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a < x < b$ pour $x > 0$.

   c. Calculer alors la somme de cette série pour $x > 0$.

2. Trouver le rayon de convergence R des séries entières $\sum_n a_n z^n$ suivantes :

   a. $a_n = \frac{n^3}{3^n}$, $n \geq 0$,

   b. $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$, $n \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

   Indication : on pourra d'abord regarder le cas où $|z| < 1$, puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.

3. On considère l'équation différentielle suivante

$$xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0 \tag{6}$$

   a. Montrer qu'il existe une unique solution f de (6), développable en série entière autour de 0 et telle que $f(0) = 1$.

   b. Exprimer f à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice XVIII : Attention au rayon

Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières (au voisinage de 0) de l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2 y' + y = x.$$

Exercice XIX : Applications des séries entières

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Établir l'égalité :

$$\int_0^\pi \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$