

Feuille d'exercices n° 5

QUELQUES APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1 Calculs de puissances et d'exponentielles d'endomorphismes

Exercice 1. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E vérifiant $(u - \text{id}_E)^2 \circ (u - 2 \text{id}_E) = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}((u - \text{id}_E)^2) \oplus \text{Ker}(u - 2 \text{id}_E)$.
2. Notons π_2 la projection sur $\text{Ker}(u - 2 \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$ et π_1 la projection sur $\text{Ker}((u - \text{id}_E)^2)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - 2 \text{id}_E)$.
Établir les identités suivantes : $e^u \pi_2 = e^2 \pi_2$ et $e^u \pi_1 = e u \pi_1$.
3. Exprimer en fonction de u les projections π_1 et π_2 .
4. En déduire une expression de e^u en fonction de u .

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u .
2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, l'endomorphisme u^n en fonction de u . Écrire la matrice de u^n dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Exprimer, pour tout réel t , l'endomorphisme e^{tu} en fonction de u . Écrire la matrice de e^{tu} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
5. Répondre aux mêmes questions pour les endomorphismes de \mathbb{R}^3 dont les matrices dans la base canonique sont : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^{n+1} représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} \text{ où les } n \text{ premières colonnes sont égales.}$$

1. Calculer le rang de u et en déduire que les valeurs propres de u sont égales.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t .

Exercice 5. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A .
2. Diagonaliser A .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible. Dans le cas où A est inversible, déterminer son inverse.
4. Calculer A^n pour tout entier n .
5. Calculer e^{tA} pour tout réel t .

Exercice 6. Soient E l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base

canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u - (1 - a)\text{id}_E$. En déduire que $1 - a$ est valeur propre de u .
2. Si $a = 0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.
Déterminer toutes les valeurs propres de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u .
5. Notons $E_1 = \text{Ker}(u - (1 - a)\text{id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(u - (1 + 3a)\text{id}_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
6. Exprimer en fonction de u les projections de E sur les sous-espaces E_1 et E_2 .
7. Exprimer les endomorphismes u^k pour tout entier $k \geq 1$, et e^u en fonction de ces projections et en déduire leurs matrices dans la base canonique.

2 Résolution de systèmes différentiels

Exercice 7. Résoudre le système différentiel $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

1. Montrer qu'une équation différentielle d'ordre n réelle (resp. complexe), donnée par

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) + \dots + c_1\frac{d}{dt}z(t) + c_0z(t) = f(t)$$

où les c_i sont réels (resp. complexes) et f une fonction continue à valeurs réelles (resp. complexes), peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire à coefficients constants de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + V(t).$$

2. Déterminer les fonctions x de $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de l'équation

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = \cos(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

Déterminer la solution du système $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$, prenant en $t = 0$ la valeur x_0 contenue dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

Exercice 10. Déterminer la solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) - 9z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + 3y(t) - 8z(t) \end{cases}$$

telle que $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

3 Étude de suites récurrentes

Exercice 11. La suite de Fibonacci est définie par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ si $n \geq 2$ et $u_0 = u_1 = 1$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 2$.
2. Diagonaliser A et en déduire une formule non récurrente pour u_n .

Exercice 12. Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1} \end{cases}$$

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}$.

1. En choisissant correctement le vecteur X_n et la matrice A , montrer que l'on peut réécrire l'expression de récurrence de la suite $(u_n)_n$ sous la forme d'une équation matricielle $X_{n+1} = AX_n$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable? trigonalisable?
3. Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.