Feuille d'exercices n° 5

Limites et continuité de fonctions vectorielles

I. Limites

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$.
Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$.
En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3. Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2 : (x,y) \longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3 : (x,y) \longmapsto \frac{\sin x}{y}, \quad f_4 : (x,y) \longmapsto \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0,0)$:

– deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,

– une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,

– (B) et (C) peuvent exister sans être égales,

– si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Exercice 4. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 5. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^{1/3} y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|},$$

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y$$

Utilisation des coordonnées polaires

Rappel.

Soit $g\colon \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout θ, $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = \ell$.

Supposons *la limite uniforme en* θ :

$$\text{il existe } G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} |g(\rho,\theta)-\ell| \leq G(\rho), & \forall\, \rho > 0,\ \forall\theta \\ \lim_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Sous ces conditions, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est telle que $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = g(\rho,\theta)$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions $g : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta)$. On précisera si :

1. La limite est indépendante de θ.
2. La limite est uniforme pour $\theta \in [0,2\pi[$

$$g(\rho,\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta + 3}, \qquad g(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho\ln(\rho\sin(\theta)), & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la fonction $f(x,y)$ telle que $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = g(\rho,\theta)$.

Exercice 7. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions des limites suivantes :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Étudier ensuite les limites pour $(x,y) \to (0,0)$ et $\|(x,y)\| \to \infty$ de la fonction

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2+x+y+1)^\alpha}{x^2+y^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. En utilisant les coordonnées polaires, calculer les limites pour $(x,y) \to (0,0)$ ainsi que $\|(x,y)\| \to +\infty$ des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2},$$
$$f(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2), \qquad f(x,y) = ye^x + \ln|y|.$$

II. Continuité

Exercice 10. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}.$$

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0,0)$.

2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 11. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 12. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : (x,y) \longrightarrow \begin{cases} x^2y \text{ si } x < y, \\ y \text{ si } x \geq y \end{cases}$
2. $f : (x,y) \longrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(1/(xy)) \text{ si } xy \neq 0, \\ 0 \text{ si } xy = 0 \end{cases}$
3. $f : (x,y) \longrightarrow \begin{cases} x^4 \text{ si } x^2 < y \\ y^2 \text{ si } x^2 \geq y \end{cases}$
4. $f : (x,y) \longrightarrow \begin{cases} xy \text{ si } x^2+y^2 \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x^2+y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 13. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R}$;, f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x,y) \in \mathcal{D} \text{ t.q. } f(x,y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f dans $\mathcal{D}$.
Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et ensuite les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x,y) = x^2+y^2$ et $f(x,y) = y/x$.

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \qquad k = 0, -1; \qquad f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \qquad k = 1, 2.$$
$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \qquad k = 2; \qquad f(x,y) = x-y-|x-y|, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Exercice 16. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications continues.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall q \in \mathbb{Q}, f(qx) = qf(x)$.
4. En déduire que f est une application linéaire.

Exercice 18. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (x+2y^2)\exp(-|xy|), \quad f(x,y) = \exp(\cos(1+xy)), \quad f(x,y) = (x^4+y^2)\exp(-x^2-y^4).$$

III. Continuité des applications linéaires

Exercice 19. (Une forme linéaire non continue)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1) Montrer que l'application $\|.\|$ définit une norme sur E.

2) Pour $c \in [0;1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$.

   Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\| \ \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 21. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

Soit $\mu : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, on ait $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
2. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ.

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \le k \le n} |a_k|$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array}.$$

Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ces cas, déterminer la norme de ϕ_c.

Exercice 23. On fixe un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \le C \int_{-1}^1 P(x)^2 dx.$$