
Feuille d'exercices n° 5

TOPOLOGIE

1 Normes et distances

Rappels.

Définition NORME : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle norme sur E une application

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+,$$

qui vérifie

N1 (séparation) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2 (homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

N3 (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n.).

Soit E un e.v.n. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui au couple $(x, y) \in E \times E$ associe $d(x, y) := \|x - y\|$ s'appelle une distance induite par la norme.

Définition DISTANCE : Soit E un ensemble non-vide. On dit qu'une application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

D1 (séparation) $\forall (x, y) \in E \times E, \{x = y\} \Leftrightarrow \{d(x, y) = 0\}$;

D2 (symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$;

D3 (inégalité triangulaire) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

On appelle espace métrique tout couple (E, d) où $E \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

Exercice 1. Les normes usuelles de \mathbb{R}^n

On définit sur \mathbb{R}^n les applications suivantes :

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^n .

2. On s'intéresse ici à la norme $\|\cdot\|_2$:

a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$P : t \rightarrow \sum_{i=1}^n (|x_i| + t|y_i|)^2,$$

lorsque x et y désignent deux vecteurs donnés de \mathbb{R}^n .

- i. Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que P est toujours à valeurs positives?
- ii. En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

- b. En déduire que $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur \mathbb{R}^n .
3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{cases}$$

En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.

4. Représenter dans \mathbb{R}^2 les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{ll} N_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto |x + y| + |x| \end{array}, \quad \begin{array}{ll} N_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \max(|x + 3y|, |x - y|) \end{array}.$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à N_1 , et par rapport à N_2 .

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$\begin{array}{ll} N : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto |ax + by| + |cx + dy| \end{array}$$

définisse une norme sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Pour $x, y \in E$ on définit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $d(x, y)$ définit une distance.
2. Montrer que cette distance n'est induite par aucune norme.

Exercice 5. Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Soit l'application

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|. \end{array}$$

1. Montrer que d est une distance sur \mathbb{R} .
2. La distance est-elle induite par une norme ?

3. On munit \mathbb{R} de la distance d . Montrer que \mathbb{R} est borné. Calculer son diamètre.

On rappelle que le diamètre d'une partie $A \in \mathbb{R}^n$ bornée est défini par :

$$\delta(A) = \sup_{(X, X') \in A \times A} d(X, X').$$

4. De façon plus générale, à toute bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$, on associe l'application

$$\begin{aligned} \delta_f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \delta_f(x, y) = |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

a. Démontrer que δ_f est une distance sur \mathbb{R}

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction f pour que δ_f soit induite par une norme.

2 Ouverts, fermés

Exercice 6. Montrer en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé que :

1. Tout ouvert de \mathbb{R}^n est une réunion de boules ouvertes.
2. L'ensemble $]a, b[$, $a < b$ est ouvert dans \mathbb{R} .
3. L'ensemble $[a, b]$, $a < b$ est fermé dans \mathbb{R} .
4. L'ensemble $[a, b[$, $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} .
5. L'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est fermé dans \mathbb{R} .
6. L'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} .
7. Si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n contenant une boule ouverte, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivantes sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

1. L'intervalle dans \mathbb{R}^2 : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, y = 0.\}$
2. Le cercle unitaire : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1.\}$
3. Le disque : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1.\}$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in E$ et on définit

$$\begin{aligned} f : E &\mapsto E \\ u &\longrightarrow x_0 + u \end{aligned}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E .
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E .

Exercice 9.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{i=1}^I$ est une famille finie d'ouverts de \mathbb{R}^n alors $\bigcap_{i=1}^I U_i$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

2. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Énoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union de familles de fermés.

Exercice 10. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}.$$

Exercice 11. Voisinage

Soit P un point de \mathbb{R}^n . En général on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété dans un voisinage de P si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant P .

1. Établir si les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Établir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \quad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$