Feuille d'exercices n° 5

Séries de Fourier

I. Études de fonctions numériques

Exercice 1. On considère la fonction f de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation exponentielle puis en formulation trigonométrique.
4. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \cos(\alpha x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation exponentielle puis en formulation trigonométrique.
4. Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice 3.

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x$. En déduire les valeurs des sommes

$$S_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad S_2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad S_3 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_4 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. Déterminer la série de Fourier de la fonction g impaire, 2π-périodique, définie sur $[0; \pi[$ par $g(x) = x$. Étudier ses modes de convergence. Retrouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2; 1]$.
Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des coefficients réels.

Exercice 5. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (voir l'Exercice 1).

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0; \pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f (trigonométriques et exponentiels).
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des deux sommes suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

II. Exercices théoriques

Exercice 7. Déterminer la série de Fourier (en formulation trigonométrique et en formulation exponentielle) de la fonction sin.

Exercice 8. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\displaystyle\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice 9. Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$? Et pour tout $x \in]0, \pi[$?

Exercice 10. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

III. Anciens sujets d'examen

Exercice 11. Soit la fonction f paire, 2π-périodique définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un rapide dessin du graphe de la fonction.
2. f est-elle partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

   Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.

5. En remarquant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

   trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\sin(x)|$ si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle .

   N.B. : On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

4. À l'aide de l'égalité de Parseval, évaluer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.