
Feuille d'exercices n° 4

RÉELS

Exercice 1. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0)$.
5. Pour tout intervalle ouvert I , on a : $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
6. Pour tout intervalle ouvert $I \neq \mathbf{R}$, on a : $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
7. $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
8. $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_-^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 2. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tout couple $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on a : $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a : $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a : $-28 \leq xy \leq 8$.
4. Pour tout couple $(x, y) \in ([-3, -2] \cup [3, 4]) \times ([-4, -1] \cup [1, 2])$, on a : $-12 \leq xy \leq 8$.

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2, |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda > 0, |xy| \leq \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \frac{1}{\lambda} y^2)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$, l'on a

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $(x + y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a $|x|^k \leq (1 + x^2)^{\frac{k}{2}}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $|x|^k \leq (1 + x^2)^{\frac{n}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$ l'on a

$$|x^n - y^n| \leq n|x - y| [\max\{|x|, |y|\}]^{n-1}.$$

Exercice 7. Soit z_1 et z_2 deux réels.

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, sont équivalents

1. $(x - z_1)(x - z_2) \leq (y - z_1)(y - z_2)$;
2. $\left(\frac{x + y}{2} \leq \frac{z_1 + z_2}{2} \text{ et } x \geq y\right)$ ou $\left(\frac{x + y}{2} \geq \frac{z_1 + z_2}{2} \text{ et } x \leq y\right)$.

Interpréter géométriquement le cas $z_1 = z_2$.

Exercice 8. Déterminer les bornes inférieures et supérieures des ensembles qui suivent.

$$A = \{ |xy| \mid x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [2, 3] \}; \quad B = \{ |x + 3y| \mid x \in [0, 1] \cup [5, 6] \text{ et } y \in [-3, -2] \};$$

$$C = \{ xy \mid x \in [-1, 1[\text{ et } y \in [3, 4] \}; \quad D = \{ -y(x^2 + 1) \mid x \in [-1, 0] \text{ et } y \in [-2, -1] \cup [3, 4[\}.$$

Exercice 9. Soit I un ensemble non vide et deux familles $(a_i)_{i \in I} \in \mathbf{R}^I$ et $(b_i)_{i \in I} \in \mathbf{R}^I$ majorées telles que, pour tout $i \in I$, l'on ait $a_i \leq b_i$. Notons

$$A = \{ a_i \mid i \in I \} \quad \text{et} \quad B = \{ b_i \mid i \in I \}.$$

Comparer les bornes supérieures de A et B .

Exercice 10. Soit A une partie non vide de \mathbf{R} .

1. Montrer que \emptyset ne possède pas de borne supérieure.
2. On note $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
 - (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
 - (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
3. Soit $B \subset A$ non vide.
 - (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
 - (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.

4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On note $\lambda A = \{ \lambda a \mid a \in A \}$.
- (a) Montrer que $\inf \lambda A$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et que dans ce cas $\inf \lambda A = \lambda \inf A$.
- (b) Montrer que $\sup \lambda A$ existe si et seulement si $\sup A$ existe et que dans ce cas $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.
5. On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^*$ et l'on note $B = \{ \frac{1}{a} \mid a \in A \}$.
- (a) Montrer que $\sup B$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et est strictement positif, et que dans ce cas $\sup B = 1/\inf A$.
- (b) Montrer que B est minoré et déterminer $\inf B$.
6. Soit B une partie non vide de \mathbf{R} telle que, pour tout $(a, b) \in A \times B$, l'on ait $a \leq b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A \leq \inf B$.
7. Soit B une partie non vide de \mathbf{R} . On note $A + B = \{ a + b \mid (a, b) \in A \times B \}$.
- (a) On suppose A et B majorés. Montrer que $\sup A + B$ existe et vaut $\sup A + \sup B$.
- (b) On suppose A et B minorés. Montrer que $\inf A + B$ existe et vaut $\inf A + \inf B$.
8. Soit B une partie non vide de \mathbf{R} . On note $AB = \{ ab \mid (a, b) \in A \times B \}$. On suppose A et B bornés.
- (a) Montrer que AB possède des bornes supérieure et inférieure.
- (b) On suppose $A \subset \mathbf{R}^+$ et $B \subset \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\inf AB = \inf A \times \inf B \quad \text{et} \quad \sup AB = \sup A \times \sup B .$$

9. On suppose A bornée. Justifier son existence et déterminer le diamètre

$$\delta(A) = \sup \{ |x - y| \mid (x, y) \in A^2 \} .$$

Exercice 11. Soit I un ensemble non vide et $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ deux familles bornées de réels.

1. Montrer que $(a_i + b_i)_{i \in I}$ est majorée et que

$$\sup_{i \in I} (a_i + b_i) \leq \sup_{i \in I} a_i + \sup_{i \in I} b_i .$$

2. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?
3. Montrer que $(|a_i - b_i|)_{i \in I}$ est bornée et que

$$\left| \sup_{i \in I} a_i - \sup_{i \in I} b_i \right| \leq \sup_{i \in I} |a_i - b_i| .$$

Exercice 12. Montrer que toute partie non vide minorée de \mathbf{Z} possède un minimum et que toute partie non vide majorée de \mathbf{Z} possède un maximum.

Indication : choisir un élément de cette partie à distance au plus $\frac{1}{2}$ de la borne inférieure.

Exercice 13.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient :

- (a) $\lfloor x \rfloor = 0$;
- (b) $\lfloor x \rfloor = -3$;
- (c) $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$.

2. Représenter graphiquement l'application $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 14. On définit, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, $E_x = \{n \in \mathbf{N} \mid 2^n \leq x\}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, E_x admet une borne supérieure.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, $\sup E_x = \max E_x = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 .$$

2. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor .$$

4. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

Exercice 16. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on définit la partie entière supérieure par

$$\lceil y \rceil = \min \{ k \in \mathbf{Z} \mid k \geq y \} .$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq x < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k} .$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq \frac{\lfloor a^{k+1} x \rfloor}{a^{k+1}} .$$

3. Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lceil y \rceil \in \{\lfloor y \rfloor, \lfloor y \rfloor + 1\}$. À quelle condition a-t-on $\lceil y \rceil = \lfloor y \rfloor$?

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lceil a^k x \rceil}{a^k} - \frac{1}{a^k} < x \leq \frac{\lceil a^k x \rceil}{a^k} .$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lceil a^{k+1} x \rceil}{a^{k+1}} \leq \frac{\lceil a^k x \rceil}{a^k} .$$

Exercice 17. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x + a)$ soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = -x + a)$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall(x, y) \in \mathbf{Q}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{Q}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{Q}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{Q}, f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$.
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{Q}, f(x) = \lambda x$.
5. On suppose f croissante. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \lambda x$. Indication : encadrer x par des rationnels pour montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lambda x - \varepsilon \leq f(x) \leq \lambda x + \varepsilon$.

Exercice 19. On dit qu'une partie A de \mathbf{R} est *convexe* si

$$\forall(a, b) \in A^2, \forall t \in [0, 1], ta + (1 - t)b \in A,$$

c'est-à-dire si $\forall(a, b) \in A^2, [a, b] \subset A$. L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour toute partie A de \mathbf{R} , sont équivalents :

- (i) A est un intervalle ;
- (ii) A est convexe.
 1. (a) Montrer qu'une intersection quelconque de convexes est convexe.
(b) Montrer que si A est convexe, alors $-A := \{-x \mid x \in A\}$ est convexe.
 2. (a) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $[\alpha, \infty[$ et $]\alpha, \infty[$ sont convexes.
(b) Démontrer que (i) implique (ii).
 3. Soit A une partie convexe non vide. On se donne $x_0 \in A$.
(a) Supposons A majoré. Montrer que $[x_0, \sup A[\subset A \cap [x_0, +\infty[\subset [x_0, \sup A]$.
(b) Supposons que A n'est pas majoré. Montrer que $A \cap [x_0, +\infty[= [x_0, +\infty[$.
 4. Montrer que (ii) implique (i).

Exercice 20.

1. Montrer qu'une intersection quelconque d'intervalles est un intervalle.
2. Soit J un ensemble non vide et $(I_j)_{j \in J} \in \mathcal{P}(\mathbf{R})^J$ une famille d'intervalles telle que $\bigcap_{j \in J} I_j \neq \emptyset$.
Montrer que $\bigcup_{j \in J} I_j$ est un intervalle.

Exercice 21. Décider si les ensembles qui suivent sont des intervalles.

1. $[0, 1[\cup]1, 2]$;
2. $\left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} < -1 \right\}$;
3. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x(x + 2)(x - 1) \leq 0 \}$;
4. $\{ x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq |x| + |x - 1| \}$;
5. $\cos^{-1}(\{0\})$;
6. $\{ x \in \mathbf{R} \mid ||x| - 2| > |x - 2| \}$.