
Feuille d'exercices n° 4
Réels

Exercice 1. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0.$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0).$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0).$
5. Pour tout intervalle ouvert I, on a : $\forall x \in I, \exists\, \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I.$
6. Pour tout intervalle ouvert $I \neq \mathbf{R}$, on a : $\exists\, \varepsilon > 0, \forall x \in I,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I.$
7. $\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^\star)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right).$
8. $\forall (x,y) \in \left(\mathbf{R}^\star_-\right)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right).$

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 3.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.
2. En déduire que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda > 0$, $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(\lambda\, x^2 + \frac{1}{\lambda}\, y^2\right)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ et tout $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, x_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$, l'on a

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \ \leq\ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\ .$$

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2$ et tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a $(x+y)^{\frac{1}{n}}\ \leq\ x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$.
2. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\ \leq\ \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\ .$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a $|x|^k \leq (1+x^2)^{\frac{k}{2}}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $|x|^k \leq (1+x^2)^{\frac{n}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}^\star$ l'on a

$$|x^n - y^n| \ \leq \ n\,|x-y| \ \left[\max\left\{|x|,|y|\right\}\right]^{n-1} \ .$$

Exercice 6. Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que sont équivalentes les inégalités suivantes :

1. $|x-z| \leq |y-z|$;
2. $\left(z - \frac{x+y}{2}\right)\,(y-x) \leq 0$.

Que devient la seconde inégalité quand $x \leq y$?

Exercice 7. Soit I un ensemble non vide et deux familles $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{R}^I$ et $(b_i)_{i\in I} \in \mathbf{R}^I$ majorées telles que, pour tout $i \in I$, l'on ait $a_i \leq b_i$. Notons

$$A \ = \ \{\, a_i \,|\, i \in I \,\} \qquad \text{et} \qquad B \ = \ \{\, b_i \,|\, i \in I \,\} \ .$$

Comparer les bornes supérieures de A et B.

Exercice 8. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que $\emptyset$ ne possède pas de borne supérieure.
2. On note $-A = \{\, -a \,|\, a \in A \,\}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
3. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.
4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On note $\lambda A = \{\, \lambda\, a \,|\, a \in A \,\}$.
   (a) Montrer que $\inf \lambda A$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et que dans ce cas $\inf \lambda A = \lambda \inf A$.
   (b) Montrer que $\sup \lambda A$ existe si et seulement si $\sup A$ existe et que dans ce cas $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.
5. On suppose $A \subset \mathbf{R}_+^\star$ et l'on note $B = \left\{\, \frac{1}{a} \,\middle|\, a \in A \,\right\}$.
   (a) Montrer que $\sup B$ existe si et seulement si $\inf A$ existe et est strictement positif, et que dans ce cas $\sup B = 1/\inf A$.
   (b) Montrer que B est minoré et déterminer $\inf B$.
6. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $(a,b) \in A \times B$, l'on ait $a \leq b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A \leq \inf B$.
7. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note $A + B = \{\, a+b \,|\, (a,b) \in A \times B \,\}$.
   (a) On suppose A et B majorés. Montrer que $\sup A + B$ existe et vaut $\sup A + \sup B$.

(b) On suppose A et B minorés. Montrer que $\inf A+B$ existe et vaut $\inf A+\inf B$.

8. Soit B une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note $AB=\{\, ab \mid (a,b)\in A\times B \,\}$. On suppose A et B bornés.

   (a) Montrer que AB possède des bornes supérieure et inférieure.

   (b) On suppose $A\subset\mathbf{R}^+$ et $B\subset\mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\inf AB \;=\; \inf A\times\inf B \quad\text{et}\quad \sup AB \;=\; \sup A\times\sup B\ .$$

9. On suppose A bornée. Justifier son existence et déterminer le diamètre

$$\delta(A) \;=\; \sup\left\{\, |x-y| \;\middle|\; (x,y)\in A^2 \,\right\}\ .$$

Exercice 9. Soit I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles bornées de réels.

1. Montrer que $(a_i+b_i)_{i\in I}$ est majorée et que

$$\sup_{i\in I}(a_i+b_i) \;\le\; \sup_{i\in I} a_i \;+\; \sup_{i\in I} b_i\ .$$

2. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?

3. Montrer que $(|a_i-b_i|)_{i\in I}$ est bornée et que

$$\left|\sup_{i\in I} a_i \;-\; \sup_{i\in I} b_i\right| \;\le\; \sup_{i\in I}|a_i-b_i|\ .$$

Exercice 10. Montrer que toute partie non vide minorée de $\mathbf{Z}$ possède un minimum et que toute partie non vide majorée de $\mathbf{Z}$ possède un maximum.
Indication : choisir un élément de cette partie à distance au plus $\frac{1}{2}$ de la borne inférieure.

Exercice 11.

1. Déterminer l'ensemble des $x\in\mathbf{R}$ qui vérifient :

   (a) $\lfloor x\rfloor=0$;

   (b) $\lfloor x\rfloor=-3$;

   (c) $\lfloor x\rfloor=\frac{1}{2}$.

2. Représenter graphiquement l'application $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $x\longmapsto\lfloor 2x\rfloor$.

Exercice 12. On définit, pour tout $x\in\mathbf{N}^*$, $E_x=\{n\in\mathbf{N}\mid 2^n\le x\}$.

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{N}^*$, E_x admet une borne supérieure.

2. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{N}^*$, $\sup E_x=\max E_x=\left\lfloor\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right\rfloor$.

Exercice 13.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a :
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \ \leq \ \lfloor x+y \rfloor \ \leq \ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \ .$$
2. Montrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^\star$, on a :
$$\lfloor x \rfloor \ = \ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \ .$$
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :
$$\lfloor x \rfloor \ = \ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \ .$$
4. Montrer que, pour tout $(x,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor n+x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

Exercice 14. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on définit la partie entière supérieure par
$$\lceil y \rceil \ = \ \min \{ \, k \in \mathbf{Z} \, | \, k \geq y \, \} \ .$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lfloor a^k \, x \rfloor}{a^k} \ \leq \ x \ < \ \frac{\lfloor a^k \, x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k} \ .$$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lfloor a^k \, x \rfloor}{a^k} \ \leq \ \frac{\lfloor a^{k+1} \, x \rfloor}{a^{k+1}} \ .$$
3. Soit $y \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lceil y \rceil \in \{\lfloor y \rfloor, \lfloor y \rfloor + 1\}$. À quelle condition a-t-on $\lceil y \rceil = \lfloor y \rfloor$?
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lceil a^k \, x \rceil}{a^k} - \frac{1}{a^k} \ < \ x \ \leq \ \frac{\lceil a^k \, x \rceil}{a^k} \ .$$
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a
$$\frac{\lceil a^{k+1} \, x \rceil}{a^{k+1}} \ \leq \ \frac{\lceil a^k \, x \rceil}{a^k} \ .$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x-y|$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x + a)$ soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = -x + a)$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{Q}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{Q}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{Q}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^\star, \forall x \in \mathbf{Q}, f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n}$.
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{Q}, f(x) = \lambda x$.
5. On suppose f croissante. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \lambda x$. Indication : encadrer x par des rationnels pour montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lambda x - \varepsilon \leq f(x) \leq \lambda x + \varepsilon$.

Exercice 17. On dit qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est *convexe* si

$$\forall (a,b) \in A^2,\ \forall t \in [0,1],\ t\,a + (1-t)\,b \in A,$$

c'est-à-dire si $\forall (a,b) \in A^2,\ [a,b] \subset A$. L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour toute partie A de $\mathbf{R}$, sont équivalents :

(i) A est un intervalle ;

(ii) A est convexe.

1. (a) Montrer qu'une intersection quelconque de convexes est convexe.
   (b) Montrer que si A est convexe, alors $-A := \{ -x \mid x \in A \}$ est convexe.
2. (a) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $[\alpha, \infty[$ et $]\alpha, \infty[$ sont convexes.
   (b) Démontrer que (i) implique (ii).
3. Soit A une partie convexe non vide. On se donne $x_0 \in A$.
   (a) Supposons A majorée. Montrer que $[x_0, \sup A[\ \subset\ A \cap [x_0, +\infty[\ \subset\ [x_0, \sup A]$.
   (b) Supposons que A n'est pas majorée. Montrer que $A \cap [x_0, +\infty[= [x_0, +\infty[$.
4. Montrer que (ii) implique (i).

Exercice 18.

1. Montrer qu'une intersection quelconque d'intervalles est un intervalle.
2. Soit J un ensemble non vide et $(I_j)_{j \in J} \in \mathcal{P}(\mathbf{R})^J$ une famille d'intervalles telle que $\bigcap_{j \in J} I_j \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{j \in J} I_j$ est un intervalle.

Exercice 19. Décider si les ensembles qui suivent sont des intervalles.

1. $[0,1[\cup]1,2]$;
2. $\left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; x \neq 0 \text{ et } \dfrac{1}{x} < -1 \right\}$;
3. $\{ x \in \mathbf{R} \mid x(x+2)(x-1) \leq 0 \}$;
4. $\{ x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq |x| + |x-1| \}$;
5. $\cos^{-1}(\{0\})$;
6. $\{ x \in \mathbf{R} \mid ||x| - 2| > |x-2| \}$.