Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Maths III PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 4 : Valeurs propres – Sous-espaces propres – Polynôme caractéristique

---

Exercice 1. Déterminer le spectre et les espaces propres (on précisera leurs dimensions) de chacun des endomorphismes suivants :

1. L'endomorphisme u_1 de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $u_1(P) = XP'$.
2. L'endomorphisme u_2 de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par : si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors $u_2(a)$ est la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. L'endomorphisme u_3 de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par : si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $u_3(a)$ est la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. L'endomorphisme u_4 de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $u_4(f) = f'$.
5. L'endomorphisme u_5 de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $u_5(f) = f''$.

Exercice 2.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous-espaces propres de chacune des matrices suivantes, que l'on considérera successivement comme matrices réelles puis complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est D. Préciser le spectre et les sous-espaces propres de u.
3. On note v (resp. w) l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ (resp. $\mathbb{C}_1[X]$) dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X)$ est F. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de v (resp. w).

Exercice 3. Étant donné un polynôme unitaire $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, sa "matrice compagnon" est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que tous les espaces propres d'une matrice compagnon sont des droites.

Exercice 4. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A ou B est inversible, alors les matrices AB et BA sont semblables. Donner un exemple montrant que si ni A, ni B ne sont inversibles, alors il se peut que AB et BA ne soient pas semblables.
2. On définit par blocs deux matrices $C = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & XI_n \end{pmatrix}$. Calculer les produits CD et DC et en déduire que $\det C = \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda \in \mathbb{C}$ alors son conjugué $\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.
2. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A, alors son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, de même multiplicité algébrique.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. On note v la restriction de u à $\operatorname{Ker} u$. Que vaut χ_v ? En déduire qu'il existe un et un seul réel α tel que $\chi_u = X^{n-1}(X-\alpha)$.
2. Montrer que $u \circ u = \alpha u$.
3. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique ne comporte que des 1. Que vaut χ_u ? Étant donnés deux réels a et b, que vaut le déterminant de la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent b et tous les autres valent a ?

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit α un réel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'égalité $u \circ u = \alpha u$.

1. Montrer que : si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
2. Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 0$. En posant $p = \dfrac{1}{\alpha} u$, montrer que le spectre de u possède au plus deux éléments, que le polynôme caractéristique de u est scindé et que la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée dans le polynôme caractéristique.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

   Indication : on pourra considérer une matrice A de u dans une base quelconque de E et montrer que si A possède une valeur propre, elle est nécessairement nulle.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute racine n-ième de l'unité ω et pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on introduit les notations suivantes :

$$X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice M est appelée une "matrice circulante".

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que chaque vecteur X_ω est un vecteur propre de $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ et préciser la valeur propre associée en utilisant le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.
2. En considérant la matrice $M(0, 1, 0, \ldots, 0)$, montrer que la famille $(X_\omega)_{\omega \in \mathbf{U}_n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $M = M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. On note u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ défini par $u(X) = MX$. Quelles sont les matrices respectives de u dans la base canonique et dans la base $(X_\omega)_{\omega \in \mathbf{U}_n}$? En déduire le déterminant et le polynôme caractéristique de M.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un sous-espace non trivial de $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire ni égal à $\{0\}$, ni égal à $\mathbb{C}^n$) qui est stable par tous les endomorphismes qui commutent avec u.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. En utilisant la question 1, montrer que u est une homothétie.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis en déduire que A est une matrice scalaire, c'est-à-dire une matrice de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Le résultat de la question 2 reste-t-il vrai si l'on y remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$? Et pour la question 1 ?