Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Mathématiques en cursus préparatoires, $2^{\text{ème}}$ année

---

Feuille d'exercices n° 4

TOPOLOGIE-SUITE

---

1 Topologie (suite)

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite convergente de E. Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 2. Dans un espace vectoriel normé E, montrer que pour $x, y \in E$,

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|.$$

En déduire que la norme est une application continue de E vers $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient K et F deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque.

1. On suppose K compact et F fermé dans $\mathbb{R}^n$. On définit $d(K,F) = \inf\{\|k - f\|;\ (k,f) \in K \times F\}$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que $\|a - b\| = d(K,F)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, en considérant l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et l'axe des abscisses, montrer que le résultat précédent est en général faux si K est supposé fermé non compact.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 5. D'après le cours, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées. On va montrer ici que ceci est faux en dimension non-finie. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_+$ défini ainsi : pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in E$, on pose $\|P\| = \sum_0^d |a_j|$.

1. Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.
2. Soit (P_n) une suite de E convergente vers $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$. Notons, pour tout n, $P_n = a_{n,0} + a_{n,1} X + \cdots + a_{n,d_n} X^{d_n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k})_n$ converge vers a_k dans $\mathbb{R}$.
3. Notons $S = \{P \in E \mid \|P\| = 1\}$. Montrer que la suite (X^n) est une suite de S et n'admet pas de sous-suite convergente (dans S). Conclure.

Exercice 6. La "saucisse de Minkowski". Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d). On pose pour tout $r > 0$, $B(A, r) = \{x \in E,\ d(x, A) < r\}$. On note aussi, pour tout $A \subset X$, et $x \in X$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

1. Soit $A \subset X$, montrer que pour tout $x, y \in X$,
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
2. En déduire que pour un sous ensemble $A \subset X$ fixé, la fonction $x \in X \mapsto d(x, A)$ est continue.
3. Montrer que pour tout $r > 0$, $B(A, r)$ est un ouvert de X.
4. Montrer que
$$B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r),$$
où $B(x, r)$ est la boule ouverte classique.
5. Montrer que
$$\bar{A} = \bigcap_{r > 0} B(A, r)$$

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie de X, on dit que $x \in A$ est un point isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.
Montrer que si A est sans point isolé alors c'est aussi le cas de $\bar{A}$.

Exercice 8. Soient A, B des parties fermées, non vides, et disjointes de l'espace métrique (X, d).

1. Montrer que $d(x, A) + d(x, B) > 0$ pour tout $x \in X$. Si $x \in X$, on pose :
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$
2. Montrer que $f : X \mapsto \mathbb{R}$ est continue, et que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.
3. En déduire qu'il existe des ouverts U et V de X tels que :
$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$