

**Feuille d'exercices n° 4**

SÉRIES DE FONCTIONS

**Exercice 1. Convergence simple, normale et uniforme**

Étudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$

dans les cas suivants :

1.  $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$  sur  $[0, +\infty[$ , puis sur  $[0, 1[$ , puis sur  $[0, a]$  avec  $a \in ]0, 1[$ ,
2.  $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n^3 + x^3}$ , sur  $[0, +\infty[$  puis sur  $[0, a]$  avec  $a > 0$ ,
3.  $f_n : x \mapsto \frac{x}{n^3 + x^{3/2}}$  sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 2. Convergence simple, uniforme et normale**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4 + n}$ .

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie (non vide) de  $\mathbb{R}^*$  sur laquelle elle converge normalement.

**Exercice 3. Série de fonctions et intégrale, et dérivée**

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ .

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que sa somme  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ .
4. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et donner une expression de  $f'(x)$  sous forme de série pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose (lorsque cela a un sens)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $\varphi$ .
2. Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer explicitement :

$$I = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

**Exercice 5. Classe  $\mathcal{C}^\infty$** 

On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ . Montrer que  $f$  est bien définie et qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 6.** On pose  $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions  $\sum u_n$ .
2. Sa somme est-elle continue?
3. Étudier le comportement en  $+\infty$  de sa somme  $S$  définie par  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 7. Règle d'Abel uniforme**

Soit  $I$  un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions définies sur  $I$  telle que pour tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) = a_n(x)b_n(x)$  avec  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions réelles,  $(b_n)_n$  une suite de fonctions complexes vérifiant

- (i).  $\forall x \in I$ , la suite  $(a_n(x))_{n \geq 0}$  est positive et décroissante,
- (ii). la suite de fonctions  $(a_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ ,
- (iii). il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$ ,  $\left\| \sum_{k=0}^n b_k \right\|_\infty \leq M$ , i.e pour tout  $x \in I$ ,  $\left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| \leq M$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  et  $B_{-1}$  la fonction nulle. Pour tout  $x \in I$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $b_n(x)$  en fonction des  $B_k$ .
2. Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ . Montrer que pour tout  $x \in I$ , on a  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq 2a_{n+1}(x)M$ .
3. En déduire que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

**Exercice 8. Règle d'Abel uniforme (II)**

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+x}$  pour tout  $x \in [\pi/2; \pi]$ .

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $[\pi/2; \pi]$ .
2. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  ne converge pas normalement sur  $[\pi/2; \pi]$ .

**Exercice 9.** On considère la série de fonctions  $\sum f_n$  où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $E_s = [0, +\infty[$ .  
 (b) Montrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument sur  $E_a = ]0, +\infty[$ .  
 (c) Montrer que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $E_s$ .  
 (d) La série converge-t-elle normalement sur  $E_s$ ? Et sur  $E_a$ ? Justifier.
2. Soit  $S$  la fonction somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ . Montrer que lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $S(t)$  tend vers 1.
3. Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $\inf(A)$  pour que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$ .

**Exercice 10.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto n^\alpha x e^{-nx^2/2} \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction nulle.
2. La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ ? On discutera suivant les valeurs de  $\alpha$ .
3. Montrer que pour tout  $h > 0$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[h; +\infty[$  vers la fonction nulle.
4. On se place maintenant dans le cas particulier où  $\alpha = 1$  et on considère maintenant la série de fonctions de terme général  $f_n$ .
  - (a) Montrer qu'elle converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  et que sa somme  $S : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer, pour  $x \geq 0$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_m(x) = \sum_{n=1}^m f_n(x)$ , puis expliciter  $S(x)$  pour  $x \geq 0$ .
  - (c) La fonction  $S$  est-elle continue en 0?

**Exercice 11.** Pour  $x$  réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ , noté  $D_f$ .
2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .
3. Montrer que la fonction  $f$  est strictement décroissante.
4. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .