

Feuille d'exercices n° 4

DIAGONALISATION - POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET MINIMAL

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Diagonalisation et polynôme caractéristique

Exercice 1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E .

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\ker((u - \lambda \text{Id})^k) \subseteq \ker((u - \lambda \text{Id})^{k+1})$.

(b) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ker((u - \lambda \text{Id})^{k_0}) = \ker((u - \lambda \text{Id})^{k_0+1})$.

(c) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker((u - \lambda \text{Id})^k) = \ker((u - \lambda \text{Id})^{k+1})\}$. Montrer que pour tout entier $k \geq k_0$, $\ker((u - \lambda \text{Id})^k) = \ker((u - \lambda \text{Id})^{k+1})$.

2. On suppose que P_u est scindé et s'écrit $P_u = (-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$. De plus, écrivons le

polynôme minimal de $u : m_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\mu_i}$ (on admet que $\mu_i > 0$).

(a) Justifier les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{i=1}^p \ker((u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^p \ker((u - \lambda_i \text{Id})^{\mu_i}) \end{aligned}$$

On note $F_{\lambda_i} = \ker((u - \lambda_i \text{Id})^{\mu_i})$ et on l'appelle espace caractéristique associé à λ_i .

(b) En déduire que pour tout $i = 1, \dots, p$, $\ker((u - \lambda_i \text{Id})^{\mu_i}) = \ker((u - \lambda_i \text{Id})^{m_i})$.

(c) Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

i. u est diagonalisable.

ii. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $\ker(u - \lambda_i \text{Id}) = \ker((u - \lambda_i \text{Id})^2)$.

iii. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $E_{\lambda_i} = F_{\lambda_i}$.

iv. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de u .

2. Sans calcul, justifier qu'il existe une base de \mathbb{C}^3 constituée de vecteurs propres. En déterminer une.

3. L'endomorphisme de \mathbb{R}^3 (resp. \mathbb{Q}^3) déterminé par M est-il diagonalisable ?

Exercice 3. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant une matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Discuter en fonction de a, b, c et d la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n . Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E tel que $\text{rg}(u) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de u telle que $\text{tr}(u) = \lambda$.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(u) \neq 0$.

Exercice 7. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme nilpotent de E .

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder à l'aide du polynôme minimal? Montrer que le résultat est encore vrai si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une certaine base B est triangulaire avec une diagonale nulle, est nilpotente de degré $p \leq n$.

On rappelle que le degré de nilpotence de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ et $u^{p+1} \neq 0$.

Exercice 8. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
2. Montrer que u et v sont diagonalisables si et seulement s'il existe une base commune de diagonalisation.

Soient u et v les endomorphismes de \mathbb{R}^3 représentés respectivement dans la base canonique par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que u et v commutent.
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u et v .

5. Déterminer deux sous-espaces de \mathbb{R}^3 invariant par u et v dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.
6. En déduire une base de \mathbb{R}^3 trigonalisant u et v .

Exercice 9. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et Q un sous-ensemble de $\text{End}(E)$ tel que les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E .

1. Montrer que pour tout $u \in \text{End}(E)$ commutant avec tout élément de Q , il existe une valeur propre dont le sous-espace propre est E .
2. En déduire que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de Q sont les homothéties.
3. Dans le cas où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, montrer que le résultat précédent est faux via un contre-exemple.
4. Montrer que le résultat est cependant vrai si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension impaire.

2 Polynôme minimal

Exercice 10. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que u est linéaire. Déterminer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 11.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer J^p pour tout $p = 1, \dots, n$.
 - (b) En déduire que J est diagonalisable.
 - (c) Montrer que I_n, J, \dots, J^{n-1} sont linéairement indépendants.
 - (d) Déterminer le polynôme minimal de J .
 - (e) Calculer les valeurs propres de J .
 - (f) Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.
2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Exprimer A comme polynôme en la matrice J .

- (b) Montrer que pour tout polynôme complexe Q , $Q(J)$ est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$.
- (c) En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- (d) Calculer le déterminant de A .

Exercice 12. Soit u un endomorphisme inversible d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E où l'on suppose que \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u .
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u .

Exercice 13. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est premier avec le polynôme minimal m_u de u si et seulement si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.

Exercice 14. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que la restriction de u à F (considérée comme endomorphisme de F) est diagonalisable.

Exercice 15. Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Notons m_F et m_G les polynômes minimaux respectifs des restrictions de u à F et G . Montrer que le polynôme minimal de u est égal à $\text{ppcm}(m_F, m_G)$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 17. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(\star) \quad X^3 + X = 0.$$

Soit A non nulle satisfaisant (\star) . On considère u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \text{Id}).$$

2. Déterminer le polynôme minimal de u .
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartient pas au noyau de u alors $(x, u(x))$ est libre.
4. Montrer que $\ker(u)$ est de dimension 1. En déduire que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Conclure.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que pour toutes matrices B et C dans $\mathbb{K}[A]$, le produit BC est encore dans $\mathbb{K}[A]$ et que B et C commutent.
2. (a) Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 (b) On note d le degré du polynôme minimal de A . Montrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{d-1}) est libre. Par un argument de division euclidienne, montrer que cette famille engendre $\mathbb{K}[A]$. En déduire la dimension de $\mathbb{K}[A]$.

Exercice 19.

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{C}^*$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.
 (b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que si A et B ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, alors elles sont semblables.
2. Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer leurs rangs, leurs polynômes caractéristiques et leurs polynômes minimaux. Sont-elles semblables ?

3. (difficile) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal sont-elles semblables ?

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note P_M son polynôme caractéristique et m_M son polynôme minimal. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, P_{A-\alpha I} = P_A(X - \alpha),$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, P_{A-\alpha I} = P_A(X + \alpha),$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, m_{A-\alpha I} = m_A(X - \alpha),$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, m_{A-\alpha I} = m_A(X + \alpha).$

Exercice 21. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

1. Soit u un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de u dans la base \mathcal{B} .
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question précédente.
 (b) En déduire que pour tout polynôme unitaire $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , il existe un endomorphisme cyclique u de E dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n Q$.
3. Soit u un endomorphisme cyclique. Montrer que le polynôme minimal de u est égal au signe près à son polynôme caractéristique.