

Feuille d'exercices n° 4

LIMITES ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

I. Un peu de topologie

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts dans \mathbb{R} :

1. $]a; b[, [a; b[$ et $[a; b]$,
2. $[a; +\infty[$ et $] - \infty; b[$,
3. $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3) :

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$,
3. $[-1; 1] \times]0; 2[$,
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$,
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 5\}$.

Exercice 3. On se place dans \mathbb{R}^n pour $n \geq 1$. Montrer qu'une boule ouverte est un ouvert de \mathbb{R}^n mais qu'une boule fermée ou une sphère n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^n .

II. Limites

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$.

1. Étudier la limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 6. Pour une fonction de deux variables à valeurs réelles, on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)); \quad (C) \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\sin x}{y}, \quad f_4 : (x, y) \mapsto \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0, 0)$:

- deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,
- une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,
- (B) et (C) peuvent exister sans être égales,
- si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Exercice 7. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 8. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ et (x, y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$\begin{array}{lll}
 1. f_1(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}, & 3. f_3(x, y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|}, & 5. f_5(x, y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}, \\
 2. f_2(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & 4. f_4(x, y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}, & 6. f_6(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}.
 \end{array}$$

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^4}{x + y}$.

1. En passant en coordonnées polaires, déterminer une majoration simple de $|f(x, y)|$ pour (x, y) dans le domaine de définition de f .
2. Peut-on étudier à l'aide de la majoration précédente la limite de f en $(0, 0)$?

Exercice 10. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$\begin{array}{ll}
 1. f : (x, y) \mapsto \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & 2. f : (x, y) \mapsto \frac{x^2y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4}.
 \end{array}$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

Étudier ensuite les limites pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ et $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + y^2 + x + y + 1)^\alpha}{x^2 + y^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. Étudier les limites lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ainsi que $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$ des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ll}
 1. (x, y) \mapsto \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2 + 1}, & 3. (x, y) \mapsto (1 + |x| + |y|) \sin(y^2), \\
 2. (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}, & 4. f(x, y) \mapsto ye^x + \ln |y|.
 \end{array}$$

Exercice 13. Étudier l'existence des limites des fonctions suivantes aux points donnés et déterminer leurs valeurs si elles existent :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $(1, 0)$.
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + (y + 1)^3}{x^2 + (y + 1)^2}$ en $(0, -1)$,
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{(x - 1)^3(y - 2) - (y - 2)^2(x - 1)}{(x - 1)^4 + (y - 2)^2}$ en $(1, 2)$,
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x + 5}{(x + 5)^2 + y^2}$ en $(-5, 0)$.

III. Continuité

Exercice 14. Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0, 0)$.
2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0, 0)$?

Exercice 15. Soient α et β deux réels strictement positifs. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Exercice 16. Sur quelles parties de \mathbb{R}^2 les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.
2. $g(x, y) = \sin\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0, 0)$.

Exercice 17. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur les ensembles donnés :

1. $f : (x, y, z) \mapsto \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ sur \mathbb{R}^3 ,
2. $g : (x, y) \mapsto \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x), \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 18. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y & \text{si } x < y, \\ y & \text{si } x \geq y \end{cases}$
2. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(1/(xy)) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$
3. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y \end{cases}$
4. $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} xy & \text{si } x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 19. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans \mathbb{R}^2 :

$$f_1 : (x, y) \mapsto (x + 2y^2) \exp(-|xy|), \quad f_2 : (x, y) \mapsto \exp(\cos(1 + xy)) \quad \text{et} \quad f_3 : (x, y) \mapsto (x^4 + y^2) \exp(-x^2 - y^4).$$