Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math II - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 4

FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$A(X) = \frac{1}{X^3 - 1} \qquad B(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \qquad C(X) = \frac{1}{X^n - 1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$D(X) = \frac{X + 1}{(X - 1)^2} \qquad E(X) = \frac{2X^2 + 1}{(X - 1)^2} \qquad F(X) = \frac{X^3 + X + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2}$$

$$G(X) = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)^7}$$

Exercice 2. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

1. $A(X) = \dfrac{X^2 + X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 - 1)}$, $B(X) = \dfrac{X + 1}{(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)}$, $C(X) = \dfrac{X}{X^2 + 1}$,
2. $D(X) = \dfrac{1}{(X + 1)(X^2 + X + 1)^2}$, $E(X) = \dfrac{X^2 + 1}{(X^3 + 1)^2}$,
3. $F(X) = \dfrac{X^2 + 1}{X^4 + X^2 + 1}$, $G(X) = \dfrac{X}{X^4 + 1}$ à l'aide de considérations de parité.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n ayant n racines complexes distinctes, notées $x_1, \dots, x_n$. Soit $a \in \mathbb{C}$ distinct de toutes les racines de P.

1. En utilisant des fractions rationnelles, démontrer les formules :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a} = -\frac{P'(a)}{P(a)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k - a)^2} = \frac{P'(a)^2 - P(a)P''(a)}{P(a)^2}.$$

2. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 4.

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X + 1)}$, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (si elle existe) de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)}$.
2. À l'aide du même modèle, déterminer les limites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1 + k^2 + k^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{2k - 1}{k(k^2 - 4)}.$$

Exercice 5. Calculer la dérivée d'ordre 28 de la fraction rationnelle F, définie par $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2 + 1)}$.