Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 4

Fin de la topologie – Continuité des applications linéaires

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite convergente de E. Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 2. Dans un espace vectoriel normé E, montrer que pour $x, y \in E$,

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|.$$

En déduire que la norme est une application continue de E vers $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 4. (Une forme linéaire non continue)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1) Montrer que l'application $\|.\|$ définit une norme sur E.

2) Pour $c \in [0; 1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$.

   Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\ \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 6. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

Soit $\mu : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, on ait $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
2. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array}.$$

Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ces cas, déterminer la norme de ϕ_c.

Exercice 8. On fixe un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C \int_{-1}^1 P(x)^2 dx.$$