Feuille d'exercices n° 4

MATRICES ET ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

Exercice 1. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 2. On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 3. Soient P et S deux matrices dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S = 2P - I_n$ si, et seulement si, $P = (S + I_n)/2$. Dans la suite on suppose que ces deux identités sont vérifiées.
2. Montrer que $P^2 = P$ si, et seulement si, $S = S^{-1}$, et que $P = P^2 = {}^tP$ si, et seulement si, $S = S^{-1} = {}^tS$. Que signifient ces identités ?
3. Supposons que $n = 3$, soit $E = \mathbb{R}^3$, $X = (1, 2, 3)$ et $F = \mathrm{Vect}(X)$. Trouver la matrice P du projecteur orthogonal sur F. Trouver la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport à F. Comparer avec la question précédente.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.

1. Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
2. Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?

Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques (axe de la rotation, cosinus de l'angle de la rotation, hyperplan de la réflexion...) de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P)(X) = P(-X)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer la nature géométrique de u.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de E dans E vérifiant

$$f(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. En introduisant une base orthonormée de E, montrer que f est linéaire.