
Feuille d'exercices n° 4
APPLICATIONS ET QUANTIFICATEURS

Objectifs

1. Définition d'une application, comprendre l'importance de l'ensemble de départ, de l'ensemble d'arrivée ;
2. savoir utiliser les quantificateurs, comprendre l'importance de l'ordre des quantificateurs, savoir les appliquer aux applications ;
3. définition de l'injectivité, surjectivité et bijectivité, exemples et contre-exemple, lien avec l'image directe.

Applications

Définition d'une application

Exercice 1. Décider si les formules suivantes définissent des applications. Dans le cas contraire, corriger si possible.

1. $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, x \mapsto x$;
2. $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, x \mapsto x$;
3. $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, x \mapsto x$;
4. $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}, x \mapsto x$;
5. $f : \{\text{bleu, rouge, jaune}\} \rightarrow \{\text{bleu, jaune, rouge}\}, x \mapsto x$;
6. $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$;
7. $f^{-1}(\{1\}) = \{3\}, f^{-1}(\{2\}) = \{1\}, f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$;
8. $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\}, f^{-1}(\{2\}) = \{1\}, f^{-1}(\{3\}) = \{3\}$.

Exercice 2. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
4. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
5. $f : \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3|\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 0$;
6. $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x$.

Quantificateurs et applications

Exercice 3. Soit I un intervalle de \mathbf{R} , et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application définie sur I et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

1. la fonction f s'annule ;
2. la fonction f est toujours nulle ;
3. f n'est pas une fonction constante ;
4. f est croissante ;
5. f est décroissante ;
6. f présente un minimum ;
7. f présente un maximum.

Exercice 4. Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

Image directe, image réciproque d'une application

Exercice 5. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 6. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0, 1])$;
4. $(\cos|_{[3,7]})^{-1}([0, 1])$;
5. $(\cos|_{[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$;
6. $\sqrt{\cdot}([0, 1])$;
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2$;
10. $f^{-1}([-1, 1 \cup \{2\}])$ et $f^{-1}([0, 1]^3)$ pour $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4])$;
12. $(|\cdot|_{[-8,7]})^{-1}([2, 3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$;
14. $\exp(]-\infty, 2])$;
15. $\exp^{-1}([-1, e])$;
16. $\ln(\mathbf{R}_-)$;
17. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.

Exercice 7. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$

2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) .$$

Injektivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 8. Étudier l'injektivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \cos(x)$;

2. $[\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;

3. $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;

4. $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x$;

5. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

6. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;

7. $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 7, 9, 11\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;

8. $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto -(x - 1)$;

9. $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}, f \mapsto f(0)$.

Exercice 9.

- On considère l'application $f : I \rightarrow J, x \mapsto x^2$, où I et J sont deux intervalles de \mathbf{R} . Trouver I et J tels que :
 - f est injective mais pas surjective;
 - f est surjective mais pas injective;
 - f est bijective.
- Peut-on simplifier les exemples de la question précédente en considérant d'autres ensembles plus simple que des intervalles ?

Exercice 10. Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal, et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Montrer que f est bijective ssi f est surjective ssi f est injective.

Exercice 11. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

- On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
- On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 12. Soit E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

- Montrer que, pour tout $B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
- En déduire que si f est surjective alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
- Montrer que, pour tout $A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Montrer que si f est injective alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.