Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 3

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN : PREMIERS EXEMPLES

Rappels de cours :

Exercice 1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer les équivalences suivantes :

u est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée$\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale

$\iff$ il existe une base orthonormée$\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

et

u est autoadjoint $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique

$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

I. Exemples de matrices et d'endomorphismes orthogonaux

Exercice 2. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
   $$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 3. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On considère la matrice $A = (u_i u_j)_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ et l'on note $B = 2A - I_n$ (où I_n désigne la matrice identité de taille n). Montrer que B est une matrice orthogonale.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 5. On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthornormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomrophisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

II. Exemples de matrices symétriques et d'endomorphismes autoadjoints

Exercice 8. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 9. On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 10. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que p_F est un endomorphisme autoadjoint et en déduire que la matrice de p_F dans n'importe quelle base orthonormée de E est une matrice symétrique.
2. Dans cette question, on suppose que F est une droite vectorielle, dont on note e une base normée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note X le vecteur colonne des coordonnées de e dans la base $\mathcal{B}$ et $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ la matrice de p_F dans $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, $a_{i,j} = \langle e_i, e\rangle\langle e_j, e\rangle$.
   (b) Démontrer de nouveau le résultat de l'exercice 3 mais cette fois en expliquant sa signification géométrique.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence :

$$p \text{ est autoadjoint} \iff p \text{ est une projection orthogonale.}$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme canonique définie par

$$\|M\| = \sum_{i,j\in[\![1;n]\!]} m_{i,j}^2 \quad \forall M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que cette norme est la norme associée au produit scalaire canonique défini par

$$\forall H, K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle H, K\rangle = \mathrm{Tr}({}^tHK).$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

   Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?