Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 3

Topologie des espaces vectoriels normés

I. Ouverts et fermés

Exercice 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. $]a;b]$ et $[a;+\infty[$ pour a et b réels tels que $a<b$,
2. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\}$,
3. $A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=7y\}$,
4. $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq x\leq z\}$,
5. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|\leq 2\}$,
6. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q} \text{ et } y\in\mathbb{Q}\}$,
7. $E=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p \mid x_1^2+\cdots+x_p^2\leq 5\}$ où $p\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

1. Montrer que $F=\{f\in E \mid \forall x\in[0;1], f(x)\geq 0\}$ est un fermé de E.
2. Soit $U=\{f\in E \mid \forall x\in[0;1], f(x)>0\}$
   (a) Soit $f\in U$.
      i. Justifier l'existence du minimum de f, que l'on notera m.
      ii. Représenter graphiquement la boule ouverte de centre f et de rayon m.
   (b) Montrer que U est un ouvert de E.

II. Intérieur, adhérence et densité

Exercice 4. Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note $\overset{\circ}{X}$ l'intérieur de X et $\overline{X}$ l'adhérence de X. Soient A, B deux parties de E.

1. On suppose que $A\subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$ et $\overline{A}\subset\overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(\overset{\circ}{A\cap B})$ et $\overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$, puis les ensembles $(\overset{\circ}{A\cup B})$ et $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$.
3. Comparer les ensembles $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$, puis les ensembles $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$.

Exercice 5. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<x^2+y^2+z^2\leq 1\},\qquad C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x>y+1\},$$
$$G=\{(x,\sin(x)) \mid x\in\mathbb{R}\},\qquad (*)B=\{(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{m})\in\mathbb{R}^2 \mid n,m\in\mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et on note $F=\{f\in E \mid f(0)=0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_1$ mais qu'il est dense dans $(E,\|\,.\,\|_1)$.
   (a) Soit $g\in E$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ par
   $$\forall t\in\left[0;\frac{1}{n}\right], f_n(t)=ntg\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{et}\quad \forall t\in\left]\frac{1}{n};1\right],\quad f_n(t)=g(t).$$
   Montrer que $f_n\in F$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\|\,.\,\|_1$.
   (c) Conclure.

III. Compacts

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^4=1\}$,
2. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^5=2\}$,
3. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2\leq 1\}$,
4. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+8xy+y^2\leq 1\}$,
5. $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=x(1-2x)\}$.

Exercice 8. On considère $E=\mathcal{C}([0;2\pi];\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\,.\,\|_2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'application $f_n:[0;2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ par $f_n(x)=e^{inx}$ pour tout $x\in[0;2\pi]$.

1. Pour tous $p,n\in\mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n-f_p\|_2$.
2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E,1)$ de E et calculer $\|g_n-g_p\|_2$ pour tous $n,p\in\mathbb{N}$.
3. En déduire que $\overline{B}(0_E,1)$ de E n'est pas compacte.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.
3. Soient $A=\mathbb{R}\times\{0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercice 10. Soit $(E,\|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et $X\subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.

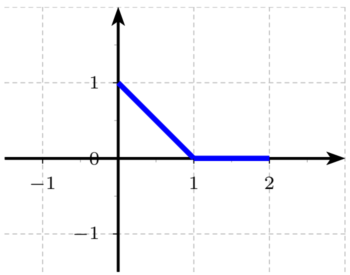
Pour s'entraîner :

Exercice 11. Dans l'exercice, on identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées afin de ne pas alourdir les notations. On considère l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}[X]$ que l'on munit des trois normes N_1, N_2, N_3 définies par : pour tout $P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\in E$ (avec seulement un nombre fini de coefficients a_k non nuls),

$$N_1(P)=\sup_{t\in[0;1]}|P(t)|\,,\quad N_2(P)=\sup_{t\in[1;2]}|P(t)|\quad \text{et}\quad N_3(P)=\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|\,.$$

On pose $\Omega=\{P\in E \mid P(0)\neq 1\}$ et on note Ω^c son complémentaire dans E.

1. Montrer que Ω est un ouvert de E pour N_1.
2. On considère la fonction f affine par morceaux qui vaut 1 en 0, est nulle sur $[1;2]$ et est représentée par le graphe suivant :



   On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément [1] vers f sur $[0;2]$.

   (a) Montrer que $N_2(P_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et que $P_n(0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

   (b) À l'aide de la suite $(P_n)_n$, construire une suite d'éléments de Ω^c qui converge vers le polynôme nul pour N_2.

   (c) En déduire que Ω n'est pas un ouvert de E pour N_2.

   (d) Que peut-on en déduire sur les normes N_1 et N_2 ?
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est un fermé de E pour N_3.

1. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.

Pour aller plus loin :

Exercice 12. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit E de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par :

$$\forall u=(u_n)_n\in E,\quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,.$$

1. On note A l'ensemble des suites croissantes de E.

   (a) Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x\in E$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite réelle $(x_k(n))_k$ converge vers $x(n)$.

   (b) En déduire que l'ensemble A est un fermé.
2. On note C l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

   (a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on considère la suite $x_k\in C$ définie par

   $$x_k(n)=\frac{1}{n+1}\text{ si } n\leq k\quad\text{et}\quad x_k(n)=0\text{ si } n>k.$$

   Montrer que la suite $(x_k)_k$ converge vers la suite $x=\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$.

   (b) L'ensemble C est-il fermé ?

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\mathring{F}\neq\emptyset$, alors $F=E$. En déduire les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts.
3. On considère un hyperplan H de E c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe alors $a\in E\backslash H$ tel que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(a)$. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.