Feuille d'exercices n° 3
Topologie

1 Normes et distances

Rappels.
Définition NORME : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E une application

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \ \|x\| \ \in \ \mathbb{R}_+,$$

qui vérifie
N1 (séparation) $\forall x \in E, \| x \|= 0 \Leftrightarrow x = 0$
N2 (homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \| \lambda x \|= |\lambda| \cdot \| x \|$
N3 (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.
Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appellé espace vectoriel normé (e.v.n.).
Soit E un e.v.n. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui au couple $(x, y) \in E \times E$ associe $d(x, y) :=\| x - y \|$ s'appelle la distance induite par la norme.
Définition DISTANCE : Soit E un ensemble non-vide. On dit qu'une application

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+,\ (x, y) \mapsto d(x, y)$$

est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :
D1 (séparation) $\forall (x, y) \in E \times E,\ x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0;$
D2 (symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x);$
D3 (inégalité triangulaire) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$
On appelle espace métrique tout couple (E, d) où $E \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

Exercice 1. Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$
On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes :
pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

1. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. On s'intéresse ici à la norme $\|x\|_2$:
   a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :
   $$P : t \to \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2,$$
   lorsque x et y désignent deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$.

i. Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que P est toujours à valeurs positives ?

ii. En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

b. En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur $\mathbb{R}^n$.

3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_1 & \leq & n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_2 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 & \leq & \|x\|_1 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_2. \end{array} \right.$$

En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.

4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{llll} N_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}, \qquad \begin{array}{llll} N_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array}.$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$\begin{array}{llll} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Pour $x, y \in E$ on définit

$$d(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $d(x, y)$ définit une distance.
2. Montrer que cette distance n'est induite par aucune norme.

Exercice 5. Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|} \right|. \end{array}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. La distance est-elle induite par une norme ?

3. On munit $\mathbb{R}$ de la distance d. Montrer que $\mathbb{R}$ est borné. Calculer son diamètre.
On rappelle que le diamètre d'une partie $A \in \mathbb{R}^n$ bornée est défini par :

$$\delta(A) = \sup_{(X,X')\in A\times A} d(X, X').$$

4. De façon plus générale, à toute bijection $f : \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$, on associe l'application

$$\begin{array}{llll} \delta_f : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \delta_f(x,y) = |f(x) - f(y)|. \end{array}$$

a. Démontrer que δ_f est une distance sur $\mathbb{R}$

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction f pour que δ_f soit induite par une norme.

2 Ouverts, fermés

Exercice 6. Montrer en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé que :

1. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.
2. L'ensemble $]a, b[$, $a < b$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $[a, b]$, $a < b$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble $[a, b[$, $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
7. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivantes sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

1. L'intervalle dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x < 3, y = 0.\}$
2. Le cercle unitaire : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1.\}$
3. Le disque : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1.\}$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{array}{llll} f & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 9.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{i=1}^I$ est une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^I U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Enoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union de familles de fermés.

Exercice 10. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$.

Exercice 11. Voisinage

Soit P un point de $\mathbb{R}^n$. En général on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété dans un voisinage de P si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant P.

1. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$