

Feuille d'exercices n° 3

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Quelques séries simples

Exercice 1. Justifier l'existence des sommes suivantes et les calculer :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (on appliquera ici Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1),
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (on appliquera ici Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto -\ln(1+x)$ entre 0 et 1).

Exercice 2. Étudier la convergence des séries $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$, et $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

II. Séries à termes positifs

Exercice 3. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. (a) $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$, | (c) $u_n = \frac{n+1}{n-7}$, | (e) $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$, | |
| (b) $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$, | (d) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, | (f) $u_n = \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$, | |
| 2. (a) $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$, | (b) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$, | (c) $u_n = \frac{n}{2^n}$, | (d) $u_n = \frac{n^{100\,000}}{2^n}$, |
| 3. (a) $u_n = \frac{1}{n!}$, | (b) $u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!}$, | (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$, | (d) $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$, |
| 4. (a) $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, | (b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, | (c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. | |

Exercice 4.

1. Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ est convergente.
2. On pose $u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}$ pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
3. Donner un encadrement de R_n , le reste d'ordre n de $\sum u_n$.

Exercice 5. Déterminer la nature et la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 6. Cas limite de la règle de d'Alembert

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 7. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \dots + (\ln n)^2}$.

Exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n}2^{-n}$, et $v_n = u_n - u_{n+1}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha v_n$.
2. Trouver un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

III. Séries à termes quelconques

Exercice 9. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, (b) $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$, (c) $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
2. (a) $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$, (b) $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$, (c) $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

Exercice 10. Une erreur classique

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 11. On considère deux suites complexes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. On s'intéresse à la convergence de la série

$$\sum_n u_n v_n. \text{ Pour } n \geq 0, \text{ on note } s_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^q u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

2. Montrer que si la suite $(s_n)_n$ est bornée, et si la suite $(v_n)_n$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_n v_n$ est convergente.

Exercice 12. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants : $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ et $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$. Pour l'étude de cette dernière, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 13.

1. En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.
2. En utilisant un développement limité, montrer que la série de terme général $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, pour $n \geq 1$, diverge.

Exercice 14. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants :

1. $u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$

2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$

Exercice 15. Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}} \right),$

2. $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n} \right),$

3. $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right) \right).$

Exercice 16. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!}.$

Exercice 17. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}.$

Exercice 18. (Développement asymptotique de H_n)

1. Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent du reste de la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}.$

2. Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la n -ième somme partielle de la série harmonique.

(a) Montrer l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, $\gamma > 0$.

(c) On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $t_n = u_n - \gamma$. Montrer l'équivalent $t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Indication : on pourra commencer par chercher un équivalent de $t_{n+1} - t_n$.

(d) On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$. Montrer l'équivalent $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

(e) En déduire un développement asymptotique à quatre termes de H_n .