Feuille d'exercices numéro 3

Angles obtus - Gram - Espaces euclidiens de polynômes - Applications des projections orthogonales

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on se place dans E, espace euclidien de dimension finie n.
On dira qu'une famille $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est **obtusangle** lorsque pour tous $i \neq j$ dans $\{0, \ldots, p\}$:

$$\langle v_i \mid v_j \rangle < 0.$$

1) Dessiner une famille obtusangle formée de trois vecteurs d'un même plan.

2) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ une famille obtusangle de vecteurs de E. Montrer que pour tous réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$:

$$\| \sum_{i=0}^{p} |\alpha_i| v_i \|^2 \leq \| \sum_{i=0}^{p} \alpha_i v_i \|^2.$$

3) L'objectif de la question est de montrer que pour tous vecteurs $v_0, v_1 \ldots, v_p$ de E :

$$(v_0, v_1, \ldots, v_p) \text{ est obtusangle} \qquad \Rightarrow \qquad (v_1, \ldots, v_p) \text{ est libre.}$$

Pour montrer cet énoncé, on prend $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$.
On note $A = \{i \mid \lambda_i > 0\}$, $B = \{j \mid \lambda_j \leq 0\}$ et $u = \sum_{i \in A} \lambda_i v_i$.

a) Montrer que $u = -\sum_{j \in B} \lambda_j v_j$.

b) En écrivant que :

$$\|u\|^2 = -\langle \sum_{i \in A} \lambda_i v_i \mid \sum_{j \in B} \lambda_j v_j \rangle,$$

montrer que $u = 0$.

c) En calculant $\langle v_0 \mid u \rangle$, montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et conclure.

4) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ une famille obtusangle formée de $n+1$ vecteurs de E (on rappelle que n désigne la dimension de l'espace E).

a) En utilisant le 3), montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

b) On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coordonnées de v_0 dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$.
En appliquant le 2) à $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = \mu_1, \ldots, \alpha_n = \mu_n$, montrer que pour tout i entre 1 et n le réel μ_i est négatif ou nul.

Exercice 2

(Cet exercice prolonge et complète le 5 de la fiche 1).
On travaille dans E espace euclidien. Pour $(v_1, \ldots, v_k)$ famille dans E, le déterminant de Gram est par définition le déterminant de la matrice :

$$G(v_1, \cdots, v_k) = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & \ldots & < v_1, v_k > \\ \vdots & & \vdots \\ < v_k, v_1 > & \ldots & < v_k, v_k > \end{pmatrix}$$

On rappelle avoir montré il y a quelques semaines que si la famille est liée, alors son Gram est nul.

1) On suppose $(v_1, \ldots, v_k)$ libre. Montrer que son Gram est strictement positif.
Dans la suite, on supposera que $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre, et on notera F le sous-espace vectoriel de E qu'ils engendrent, et p_F la projection orthogonale sur F.

2) Soit x un vecteur de E, et A la matrice-colonne $(k,1)$ des coordonnées de $p_F(x)$ dans F. Montrer que :

$$G(v_1,\cdots,v_k)\times A=\begin{pmatrix} < x,v_1 > \\ < x,v_2 > \\ \vdots \\ < x,v_k > \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que pour tout x de E :

$$d^2(x,F)=\frac{\det G(v_1,\ldots,v_k,x)}{\det G(v_1,\ldots,v_k)}.$$

4) Soit $(u_1,\cdots,u_l)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que :

$$\det G(u_1,\cdots,u_l)\leq \|u_1\|^2\cdot\|u_2\|^2\cdots\|u_l\|^2.$$

(On fera une récurrence sur $l\geq 1$ et on utilisera la question précédente).

Exercice 3

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_n)$ deux bases de E et $\underline{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que :

$$\det_{\underline{e}}(u_1,\ldots,u_n)=\det_{\underline{e}}(f_1,\ldots,f_n)\cdot\det_{\underline{f}}(u_1,\ldots,u_n).$$

2) Dans cette question et toutes celles qui suivent, on suppose que E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_n)$ deux bases orthonormées de E. En remarquant que la matrice de passage de l'une à l'autre est une matrice orthogonale, montrer que :

$$\det_{\underline{e}}(f_1,\ldots,f_n)=\pm 1.$$

3) Soit $\underline{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de n vecteurs de E et $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée. Montrer :

$$\mathrm{Vol}(u_1,\ldots,u_n)=|\det_{\underline{e}}(u_1,\ldots,u_n)|$$

(le “volume” du parallélépipède construit sur $\underline{u}$) est indépendant de la base orthonormée $\underline{e}$ utilisée.

4) Soit $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien de dimension n. Montrer que :

$$\det G(u_1,\ldots,u_n)=\mathrm{Vol}^2(u_1,\ldots,u_n).$$

Exercice 4

Dans cet exercice, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbf{R}$.
Pour u et v dans $\mathcal{C}$, on pose :

$$\langle u\mid v\rangle=\int_{-1}^{1}u(t)v(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

1) Montrer que $\langle\,|\,\rangle$ est un produit scalaire (défini positif) sur $\mathcal{C}$.

2) a) Montrer que pour tout $m\geq 0$ et tout φ réel :

$$\sin[(m+2)\varphi]=2\cos\varphi\sin[(m+1)\varphi]-\sin(m\varphi).$$

b) Expliciter un polynôme constant U_0 et un polynôme U_1 de degré 1 tels que pour tout $\varphi\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$:

$$U_0(\cos\varphi)=\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}\qquad\text{et}\qquad U_1(\cos\varphi)=\frac{\sin(2\varphi)}{\sin\varphi}.$$

c) Montrer, en effectuant une récurrence forte sur $n \geq 0$ que pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme U_n de degré n tel que, pour tout $\varphi \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$:

$$U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin\varphi}.$$

3) a) Montrer que pour $i \neq j$, U_i et U_j sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \mid \rangle$.
Indication : dans l'intégrale à calculer, on effectuera le changement de variables $\varphi = \operatorname{Arccos} t$.

b) Par le même changement de variable, calculer $\|U_n\|$.

Exercice 5

Soit f continue de $[-\pi, \pi]$ vers $\mathbf{R}$. En définissant sur un espace à bien choisir un produit scalaire par la formule :

$$< u, v >= \int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)\,dt$$

puis une projection judicieuse, orthogonale vis-à-vis de ce produit scalaire, établir des formules calculant à partir de f les réels a, b et c pour lesquels

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b\sin t - c\cos t)^2\,dt \qquad \text{est minimal.}$$

Application numérique : déterminer $\displaystyle \operatorname*{Inf}_{a,\,b,\,c\in\mathbf{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a - b\sin t - c\cos t)^2\,dt.$

Exercice 6

Soit E un espace euclidien de dimension finie notée $n+1$ et F un sous-espace de E.

1) Pour x élément de E, on pose $q(x) = \dfrac{d^2(x,F)}{n+1}$. Montrer que q est une forme quadratique positive sur E et qu'elle est définie positive si et seulement si F est réduit à $\{0\}$.

2) Dans cette question $E = \mathbf{R}^{n+1}$ avec le produit scalaire usuel et F est la droite engendrée par $(1, \ldots, 1)$. On note Var la forme quadratique décrite à la question précédente et Cov la forme bilinéaire associée.
Pour $x = (x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$, expliciter des formules fournissant sa projection orthogonale sur F puis le réel positif $\operatorname{Var}(x)$.

3) On note π la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. En remarquant que $\operatorname{Var}(x) = \|\pi(x)\|^2$ et en appliquant intelligemment le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (cf. fiche 2 exercice 5), montrer que pour tous x, y pas dans F :

$$-1 \leq \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(x)}\sqrt{\operatorname{Var}(y)}} \leq 1$$

et que le quotient ci-dessus vaut ± 1 si et seulement si $(x, y, (1, \ldots, 1))$ est lié, c'est-à-dire si et seulement si il existe a et b réels tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $y_i = ax_i + b$.

Exercice 7

On fixe $n+1$ points $P_i = (u_i, v_i)$ de $\mathbf{R}^2$ $(0 \leq i \leq n)$ où on suppose les u_i deux à deux distincts et les v_i deux à deux distincts.

1) Dans $\mathbf{R}^{n+1}$ on note :

$$\Pi = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid ((u_0, t_0), (u_1, t_1), \ldots, (u_n, t_n)) \text{ alignés}\}.$$

Montrer que Π est un sous-espace de $\mathbf{R}^{n+1}$ et qu'une base de Π est (e_0, e_1) où $e_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ et $e_1 = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$.

2) On appelle droite de régression de Y en X pour les points P_i la droite (non verticale) Δ d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^{n}(v_i - au_i - b)^2.$$

Expliquer pourquoi trouver Δ revient à déterminer la projection orthogonale de $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ sur Π dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (muni de son produit scalaire usuel).

3) Expliciter la base orthonormée (ϵ_0, ϵ_1) obtenue par application à (e_0, e_1) du procédé de Gram-Schmidt.

4) À partir des formules de la question précédente, écrire une expression de la projection orthogonale de $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ sur Π, et conclure en constatant que l'équation de Δ est :

$$y - \overline{v} = \frac{\mathrm{Cov}(u,v)}{\mathrm{Var}(u)}(x - \overline{u})$$

dans laquelle formule Var et Cov sont définies à l'exercice précédent, $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des composantes de $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

5) On appelle droite de régression de X en Y pour les points P_i la droite (non horizontale) Δ d'équation $x = \alpha y + \beta$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^{n}(u_i - \alpha v_i - \beta)^2.$$

Quelle est l'équation de Δ' ?

En utilisant l'exercice précédent, montrer que $\Delta = \Delta'$ si et seulement si les points P_i sont alignés, et que lorsque les points P_i ne sont pas alignés, les deux droites Δ et Δ' se rencontrent en un point. Lequel ?

Exercice 8

Soit E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et soit i une application linéaire injective de E dans E'. On notera $F \subset E$" l'image de i.

1) a) Montrer qu'il existe au moins une application linéaire s de E' vers E telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_E$.

b) Montrer que $i \circ s$ est un projecteur, d'image F.

c) Dans cette sous-question, on suppose $\dim E < \dim E'$. Montrer que s n'est pas unique.

2) Dans cette question on suppose l'espace E' euclidien.

a) Montrer qu'il existe un et un seul s qui vérifie $s \circ i = \mathrm{Id}_E$ et pour lequel le projecteur $i \circ s$ est un projecteur orthogonal. On l'appelle le pseudo-inverse (ou inverse généralisé) de l'injection i.

b) Montrer que ce s remarquable peut être caractérisé comme suit : "Pour tout y de E', $s(y)$ est l'unique antécédent de y par i s'il existe ; à défaut c'est le x de E pour lequel $i(x)$ est le plus proche possible de y".

3) Dans cette question, on suppose les deux espaces E et E' euclidiens et munis de bases orthonormées. On note n la dimension de E, m la dimension de E', et A la matrice (m, n) de i dans les bases orthonormées de référence.

a) Pour X matrice-colonne $(n, 1)$, montrer que $AX \neq 0$ et en déduire que ${}^tX({}^tAA)X > 0$. En déduire que ${}^tAA$ peut être interprétée comme la matrice d'une forme quadratique définie positive, puis que ${}^tAA$ est inversible.

b) Montrer qu'un projecteur de E' est un projecteur orthogonal si et seulement si sa matrice (dans la base orthonormée de référence) est symétrique.

c) On note $B = ({}^tAA)^{-1} \times {}^tA$.
Vérifier que $BA = I$, que $(AB)^2 = AB$ et que AB est une matrice symétrique. En déduire que B est la matrice du pseudo-inverse de i.

4) Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un système libre de n vecteurs de $\mathbf{R}^m$, F le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent et A la matrice (m, n) dont la j-ème colonne est formée des composantes de y_j.

On munit $\mathbf{R}^m$ du produit scalaire usuel. Écrire une formule, déduite de la question précédente, qui fournit la matrice de la projection orthogonale sur F à partir de la matrice A.