Feuille d'exercices n° 3

Suites de fonctions (II) - Théorème de convergence dominée

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$.
3. Que peut-on en déduire sur la suite $(f_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est l'application nulle.
Indication : démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)P(t)dt$ et étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n} dx$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 4. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$.

Exercice 6. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$