

**Feuille d'exercices n° 3**  
 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

**I. Normes et distances**

**Exercice 1. Les normes usuelles de  $\mathbb{R}^n$**

On définit sur  $\mathbb{R}^n$  les applications suivantes :

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .
2. On s'intéresse ici à la norme  $\|x\|_2$  :
  - a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$P : t \rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2,$$

lorsque  $x$  et  $y$  désignent deux vecteurs donnés de  $\mathbb{R}^n$ ,  $y$  non nul.

- i. Quelle condition sur le discriminant de  $P$  traduit le fait que  $P$  est toujours à valeurs positives?
- ii. En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

- b. En déduire que  $\|\cdot\|_2$  vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{cases}$$

En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.

4. Représenter dans  $\mathbb{R}^2$  les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

**Exercice 2.** On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad N_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto |x_1 + x_2| + |x_1| \quad (x_1, x_2) \mapsto \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|)$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à  $N_1$ , et par rapport à  $N_2$ .

**Exercice 3.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  pour que l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \longmapsto |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2|$$

définisse une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 4.** Les applications  $N$  suivantes sont-elles des normes ?

1.  $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$
2.  $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|^2.$
3.  $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; \frac{1}{2}]} |f(x)|.$
4.  $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$
5.  $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_0^{2\pi} |f(t) \sin t| dt.$
6.  $N : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  (où  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).
7.  $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \left| \int_0^1 f(t) dt \right|.$
8.  $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto |x| + 2|y|.$
9.  $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left( \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2.$

**Exercice 5.** Pour tout  $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ , on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

1. On a vu dans l'exercice précédent que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $C([0; 1], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\|\cdot\|_2$  définit aussi une norme sur  $C([0; 1], \mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour tout  $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ , on a  $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ , mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

*Indication : on pourra considérer les fonctions  $f_n : x \longmapsto x^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Exercice 6.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Pour  $x, y \in E$  on définit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $d(x, y)$  définit une distance.
2. Montrer que cette distance n'est induite par aucune norme.

**Exercice 7. Espaces métriques et espaces vectoriels normés**

Soit l'application

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

1. Montrer que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{R}$ .
2. La distance est-elle induite par une norme ?
3. On munit  $\mathbb{R}$  de la distance  $d$ . Montrer que  $\mathbb{R}$  est borné. Calculer son diamètre.

On rappelle que le diamètre d'une partie  $A \in \mathbb{R}^n$  bornée est défini par :

$$\delta(A) = \sup_{(X, X') \in A \times A} d(X, X').$$

**Exercice 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'application  $N_\infty$  par  $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ , pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $N_\infty$  définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ .
2. Soit  $N$  une norme quelconque sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

**Exercice 9.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Montrer qu'il existe  $\lambda > 0$  vérifiant :

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|.$$

## II. Suites et séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

**Exercice 10.** Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente de  $E$ . Montrer que l'ensemble des  $x_n$  est borné.

**Exercice 11.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique telle que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Que dire de la matrice  $B$  ?

**Exercice 12.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé de dimension finie et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ . On dit que  $f$  est contractante si

$$\exists k \in [0; 1[, \quad \forall x, y \in E, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

1. On suppose que  $f$  est contractante, et l'on introduit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) Démontrer la convergence de la série  $\sum (x_{n+1} - x_n)$ .
- (b) En déduire que  $f$  admet un point fixe et que celui-ci est unique.

2. Montrer que s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p$  soit contractante, alors  $f$  admet un unique point fixe.