Feuille d'exercices n° 3

Espaces vectoriels normés

I. Normes et distances

Exercice 1. Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes :

pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

1. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. On s'intéresse ici à la norme $\|x\|_2$:
   a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :
   $$P : t \to \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2,$$
   lorsque x et y désignent deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$, y non nul.
   i. Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que P est toujours à valeurs positives ?
   ii. En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz :
   $$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \le \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$
   b. En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\left\{ \begin{array}{lllll} \|x\|_\infty & \le & \|x\|_1 & \le & n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty & \le & \|x\|_2 & \le & \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 & \le & \|x\|_1 & \le & \sqrt{n}\|x\|_2. \end{array} \right.$$
   En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.
4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules fermées centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}, \qquad N_2 : \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array}.$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$N \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Les applications N suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
2. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|^2$.
3. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |f(x)|$.
4. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
5. $N : C([0;2\pi], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\, dt$.
6. $N : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ (où $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
7. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \left| \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \right|$.
8. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto |x| + 2|y|$.
9. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.

Exercice 5. Pour tout $f \in C([0;1], \mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

1. On a vu dans l'exercice précédent que $\| \; \|_1$ et $\| \; \|_\infty$ sont des normes sur $C([0;1], \mathbb{R})$. Montrer que $\| \; \|_2$ définit aussi une norme sur $C([0;1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $f \in C([0;1], \mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

   Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\forall P \in E, \quad \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geq \lambda \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|.$$

II. Suites et séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de E. Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $M_n(\mathbb{R})$. Que dire de la matrice B ?

Exercice 10. Soient $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé de dimension finie et f une application de E dans E. On dit que f est contractante si

$$\exists k \in [0;1[, \quad \forall x, y \in E, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

1. On suppose que f est contractante, et l'on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Démontrer la convergence de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.

   (b) En déduire que f admet un point fixe et que celui-ci est unique.

2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante, alors f admet un unique point fixe.