Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 3

ENDOMORPHISMES REMARQUABLES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1 (Rappels de cours)**.** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer les équivalences suivantes :

u est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale

$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

et

u est autoadjoint $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique

$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

I Matrices et endomorphismes orthogonaux

Exercice 2. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
   $$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 3. On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 4. Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel euclidien (non orienté) de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

II Adjoint, matrices symétriques et endomorphismes autoadjoints

Exercice 7. Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(v^\star) = (\mathrm{Im} v)^\perp \quad \text{et } \mathrm{Im}(v^\star) = (\mathrm{Ker} v)^\perp .$$

Exercice 8. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 9. On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 10. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que
$$f(x) = x + k\langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence :

$$p \text{ est autoadjoint} \iff p \text{ est une projection orthogonale.}$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?