Feuille d'exercices n° 2

Logique et raisonnement

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$
2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair)
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$
4. $\forall x \in \mathbf{R}$, $((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$
5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$ donc $x - 1 < 0$.

Exercice 2. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0,\, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
4. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\forall x \in I, \exists\, \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
5. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\exists\, \varepsilon > 0, \forall x \in I,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.
6. $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^\star)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
7. $\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}_-^\star\right)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 3.

1. Écrire l'énoncé qui traduit « La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas croissante. »
2. Cet énoncé est-il équivalent à « La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. » ?

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$.
   Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 0$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x$.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x + a)$ soit $(\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = -x + a)$.

Exercice 6. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\dots\ x \in \mathbf{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $\dots\ x \in \mathbf{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $\dots\ x \in \mathbf{R},\ 2x + 1 = 0$
4. $\dots\ x \in \mathbf{N},\ x \leq \pi$
5. $\dots\ x \in \mathbf{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$
6. $\dots\ x \in \emptyset,\ 2 = 3$.

Exercice 7. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbf{N},\ x^2 > 7$
2. $\forall x \in \mathbf{N},\ x^2 > 7$
3. $\forall x \in \mathbf{N},\ \exists y \in \mathbf{N},\ y > x^2$
4. $\exists y \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{N},\ y > x^2$
5. $\forall (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$
6. $\forall (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$.

Exercice 8. On note $A = [0,1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A$.
2. $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ (x+y) \in A$.
3. $\exists x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A$.

Exercice 9.

1. Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   (a) $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.
   (b) P et $(\text{non}(Q)$ ou $R)$.
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   (a) $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Longrightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
   (b) $\exists x \in \mathbf{R},\ \Big((x \leq 0) \text{ et } \Big((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\Big)\Big)$.

Exercice 10.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))\,.$$
2. Montrer que, pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.

Exercice 11.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)\,.$$

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow (2 \leq x \leq 3)$.

   (b) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow ((x-1)(10-x^2) \geq 0)$.

3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

   équivaut à

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que sont équivalents :

   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;

   (b) $x_0 - y_0 = 0$;

   (c) $\forall t \in \mathbf{R},\ x_0\, t + y_0\, (-t) \leq 0$.

Exercice 12.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et non}(Q))\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0\big) \Rightarrow \big(-x^4 + x^3 - 9 < 0\big)$.

Exercice 13.

1. Montrer que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R)\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\big) \Rightarrow \big((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1)\big)$.

Exercice 14.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3))\,.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbf{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Exercice 15. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour tout étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 16. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}_+, \forall z \in \mathbf{R}_+, ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.
L'écrire en français puis décider sa véracité.

Exercice 17. **Récurrence.** Démontrer les propriétés qui suivent.

1. Pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.
2. Pour toute fonction $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $j(n) \geq n$.
3. Démontrer que lorsqu'on ôte un entier naturel à sa puissance cinquième, l'on obtient un multiple de 5.

Exercice 18.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{i \in [\![1, 2n]\!] \\ i \text{ impair}}} i$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer
$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(\{i,j\}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(\{i,j\}) .$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$