
Feuille d'exercices n° 2

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair).
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, ((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$.
5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$ donc $x - 1 < 0$.

Exercice 2.

1. Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   (a) $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.
   (b) P et (non(Q) ou R).
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   (a) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Longrightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
   (b) $\exists x \in \mathbf{R}, \Big((x \leq 0) \text{ et } \big((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\big)\Big)$.

Exercice 3.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)) .$$
2. Montrer que, pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.

Exercice 4.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,
$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R) .$$
2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow ((x-1)(10 - x^2) \geq 0)$.
3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que
$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$
équivaut à
$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que sont équivalents :
   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;
   (b) $x_0 - y_0 = 0$;
   (c) $\forall t \in \mathbf{R},\ x_0\, t + y_0\, (-t) \leq 0$.

Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et non}(Q))\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0\big) \Rightarrow \big(-x^4 + x^3 - 9 < 0\big)$.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R)\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\big) \Rightarrow \big((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1)\big)$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3))\,.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbf{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Exercice 8. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\ldots\ x \in \mathbf{R}$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\ldots\ x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 3x + 2 = 0$.
3. $\ldots\ x \in \mathbf{R}$, $2x + 1 = 0$.
4. $\ldots\ x \in \mathbf{N}$, $x \leq \pi$.
5. $\ldots\ x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 2x + 3 = 0$.
6. $\ldots\ x \in \emptyset$, $2 = 3$.

Exercice 9. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbf{N},\ x^2 > 7.$
2. $\forall x \in \mathbf{N},\ x^2 > 7.$
3. $\forall x \in \mathbf{N},\ \exists y \in \mathbf{N},\ y > x^2.$
4. $\exists y \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{N},\ y > x^2.$
5. $\forall (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2)).$
6. $\forall (x,y) \in \mathbf{Z}^2,\ ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$

Exercice 10. On note $A = [0,1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A.$
2. $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ (x+y) \in A.$
3. $\exists x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A.$

Exercice 11. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour tout étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 12. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}_+, \forall z \in \mathbf{R}_+, ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2)).$
L'écrire en français puis décider sa véracité.

Exercice 13. **Récurrence.** Démontrer les propriétés qui suivent.

1. Pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.
2. Pour toute fonction $j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et tout $n \in \mathbf{N}$, on a $j(n) \geq n$.
3. Démontrer que lorsqu'on ôte un entier naturel à sa puissance cinquième, l'on obtient un multiple de 5.