

Feuille d'exercices n° 2

SUITES DE FONCTIONS

Exercice 1. Convergence simple et uniforme

On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent-elles simplement sur $[0, 1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0, 1]$? Sur $]0, 1[$? Soit $a \in]0, 1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a, 1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$?

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, puis sur $[0, 1[$, puis sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 4. Convergence et intégrales

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Convergence uniforme et dérivées

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2. Etudier la convergence de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[-1, 1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1, 1]$ par $g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2 x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers 0.

Exercice 6. Convergence uniforme et dérivées

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x/n)$. Etudier la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de \mathbb{R} .

Exercice 7. Examen Janvier 2010

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

- Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
- Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a, b]$.
- Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$.
- Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 8. Examen Juin 2010

Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x^2 + 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

- Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
- Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 9.

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ définies sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Montrer qu'elle converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

- Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ définies par

$$f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers $f : z \rightarrow e^z$.

Exercice 10. Soit $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ la suite de fonctions définies par $\forall n$

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^n(x) \sin(x).$$

- Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- On considère la suite de fonctions $(g_n)_n$ définies par $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite

$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt\right)_n$ ne tend pas vers 0.

Exercice 11. Théorème de Dini

- a. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de \mathbb{R} . Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I , montrer que la convergence est uniforme.
- b. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de \mathbb{R} . Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I , montrer que la convergence est uniforme.
- c. Application : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} définies par

$$f_0(t) = \frac{1}{e^t - 1} \quad \forall t > 0$$

$$f_{n+1}(t) = \frac{3}{4t} + \frac{t^3}{4}(f_n(t))^4 \quad \forall t > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{t}$.

Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$, puis sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* ?

Exercice 12. Montrer que la suite de fonctions définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur \mathbb{R} .