Feuille d'exercices n° 2
SUITES DE FONCTIONS

Exercice I : Convergence simple et uniforme
On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Ces suites convergent-elles simplement sur $[0, 1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0, 1]$? Sur $]0, 1]$? Soit $a \in]0, 1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a, 1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$?

Exercice II : Convergence simple et uniforme
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définies par
$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.

Exercice III : Convergence simple et uniforme
On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1 + x^n}$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, puis sur $[0, 1[$, puis sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice IV : Convergence et intégrales
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Exercice V : Convergence uniforme et dérivées
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Etudier la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice VI : Convergence uniforme et dérivées
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan(x/n)$. Etudier la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

Exercice VII : Examen Janvier 2010
Soit $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

a. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
b. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a,b]$.
c. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a,+\infty[$.
d. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice VIII : Examen Juin 2010
Soit $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

a. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
b. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$
c. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice IX

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

converge uniformémemnt sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \to e^{-x}$.

b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ définies par

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \to (1+\frac{z}{n})^n$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $f : z \to e^z$.

Exercice X

Soit $(f_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ la suite de fonctions définies par $\forall n$

$$f_n : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$
$$x \to cos^n x \cdot sinx.$$

a. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

b. On considère la suite de fonctions $(g_n)_n$ définies par $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $[\delta,\frac{\pi}{2}]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite $(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)dt)_n$ ne tend pas vers 0.

Exercice XI : Théorème de Dini

a. Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

b. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

c. Application : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_0(t) = \frac{1}{e^t-1} \qquad \forall t > 0$$

$$f_{n+1}(t) = \frac{3}{4t} + \frac{t^3}{4}(f_n(t))^4 \qquad \forall t > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \to \frac{1}{t}$.
Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus das $]0,+\infty[$, puis sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?