Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 2

Produit scalaire - Espace euclidien

Exercice 1. 1. Sur $\mathbb{R}^n$ montrer que

$$< x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

définit un produit scalaire. On l'appelle le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tous $x, y \in E$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ on ait :

$$< x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exercice 2. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$.
Indication : concernant $\dim(F^\perp)$, on pourra considérer l'application $(E \to \mathbb{R}^m ; x \mapsto (< x, b_1 >, \ldots, < x, b_m >))$, les b_i formant une base orthonormée de F.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si et s.si pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$.

Exercice 4. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une famille constituée d'éléments de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n < x, b_i >^2$.
Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale puis que c'est une base orthonormée.

Exercice 5. 1. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'une forme quadratique q positive. On notera b sa forme polaire. Montrer l'inégalité suivante (dite inégalité de Schwarz) :

$$b(x, y)^2 \leq q(x)q(y), \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Supposons de plus que q est définie. Montrer l'équivalence :

$$b(x, y)^2 = q(x)q(y) \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

2. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $<,>$. Pour $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{< x, x >}$. Montrer que $|| \cdot ||$ est une norme, i.e.
   (a) pour $x \in E$, si $||x|| = 0$ alors $x = 0$,
   (b) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
   (c) pour $x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangualaire).
3. Que vaut $||x||$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.
4. Dans le plan réel, on considère un triangle ABC. On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, AC et AB et on note θ l'angle $\widehat{ACB}$. Montrer l'égalité suivante (dite de Al-Kashi (1380-1429), ou loi des cosinus) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta).$$

En déduire le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.

Exercice 6. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, avec $n = \dim E$. On appelle projecteur orthogonal sur F la projection p_F sur F selon la somme directe : $E = F \oplus F^{\perp}$, en d'autres termes, pour $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

1. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une base orthonormale de F. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$p_F(x) =< x, v_1 > v_1 + \cdots + < x, v_p > v_p.$$
2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v)$ de dimension 1. Montrer que $p_F(x) := p_v(x) = \frac{<x,v>}{<v,v>} v$.
3. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. On construit : $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - p_{u_1}(v_2)$, $u_3 = v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$, ..., $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{u_j}(v_k)$, ...
Enfin, on pose pour tout i, $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. Montrer que les e_i forment une base orthonormale de E.
4. Appliquer ce procédé au cas de la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Exercice 7. On se donne $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ pour lesquelles la matrice de p_F est $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$
On note H l'hperplan suivant : $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 9. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose
$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E \mid \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 0\}$.

Exercice 10. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E. Démontrer l'équivalence suivante : p est un projecteur orthogonal $\iff$ pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{Im(p)} \subseteq \mathrm{Im(q)}$,
2. pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 12 (Révision de cours)**.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Montrer que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^6$, soit $H = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = (1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H.

Exercice 14. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = \sum_{i,j} m_{ij} n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N.

0. Vérifier que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tM \cdot N)$.
1. Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA\rangle = \langle S, A\rangle$.
   En déduire que $\langle S, A\rangle = 0$.
2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
3. On sait alors (voir par exemple l'ex. 2) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 15. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter
   $$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b\sin(t) - c\cos(t))^2 dt$$
   comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
3. En déduire l'expression de a, b et c en fonction de f pour lesquels l'inf précédent est atteint.
4. Application : Détrminer a, b, c pour $f(t) = t$.

Exercice 16. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Pour $n \in N$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (f(t))^n dt.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz montrer que pour tout n, $I_n I_{n+2} \geq I_{n+1}^2$.