Feuille d'exercices n° 2

Intégrales généralisées

Exercice 1. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les domaines considérés et déterminer la valeur de leur intégrale dans les cas intégrables :

1. $x \longmapsto e^{-x}$ sur $[0;+\infty[$ et $x \longmapsto e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $[1;+\infty[$ et sur $]0;1]$, discuter du résultat en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $x \longmapsto \ln(x)$ sur $]0;1]$ et $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1;+\infty[$.

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles absolument intégrables sur les intervalles donnés :

1. $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{1/2}}$ sur $]0;1]$,
2. $t \longmapsto \cos^2\left(\dfrac{1}{t}\right)$ sur $]0;1]$,
3. $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$,
4. $x \longmapsto x^{a-1}e^{-x}$ sur $]0;+\infty[$, pour $a > 0$ fixé. On note lorsque cela a un sens $\Gamma(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Intégrales de Bertrand.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut étudier la nature de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$

(Les intégrales de Riemann sont supposées connues, mais pas les intégrales de Bertrand.)

1. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la convergence de l'intégrale étudiée.
2. On suppose $\alpha = 1$.
   (a) Soit $x > e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose enfin $\alpha < 1$.
   (a) Déterminer la limite de $\dfrac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature de l'intégrale étudiée.

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 5. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$,
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6. Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x+e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$,
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+\alpha x}\right)\mathrm{d}x$ où $\alpha \in [-4;+\infty[$.

Exercice 7.

1. Étudier l'intégrabilité sur $]1;+\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$.
2. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 8. Étudier l'intégrabilité de la fonction $g : t \longmapsto \ln(\operatorname{th} t)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 9. Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (Intégrale de Fresnel)

Exercice 10. Démontrer l'énoncé suivant (Critère de Cauchy) :
Théorème : Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 1$ tel que pour tout $a, b > R$ on a

$$\left|\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Exercice 11. Démontrons de deux manières différentes que $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

   (b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (c) En déduire que $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

2. En utilisant les séries numériques :

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$.

   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

   En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$ lorsque $N \to +\infty$.

   (d) Conclure sur la non intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[1;+\infty[$.

Exercice 12. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalence suivante :

$$\text{la suite } \left(\sum_{n=1}^{N} f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite finie } \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{i.e. } f \text{ est intégrable sur } [1;+\infty[)$$

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $[a;+\infty[$. Montrer que si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.