Feuille d'exercices n° 2

Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.

Calculer AB puis $\det B$.

Exercice 3. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 4. Soient k et a deux réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On désigne par I_n la matrice identité de taille n. Déterminer les nombres complexes λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Montrer que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. À l'aide du pivot de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de développement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Déterminant de Vandermonde

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'égalité suivante :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 11. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Trouver une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1}.
3. En déduire une expression de D_n en fonction de n.
4. Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a.

Exercice 13. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la matrice tridiagonale, à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e* ${}^tA = -A$.
Montrer que si A est inversible, alors n est nécessairement pair.

Exercice 15. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des entiers impairs.
Montrer que $\det A$ est un entier, et que celui-ci est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 16. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 17. On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.

Exercice 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.

1. Montrer que si A est de rang n, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang n.
2. Montrer que si A est de rang $n-1$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.
3. Montrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 0.