

Feuille d'exercices n° 4
 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Normes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, rappeler l'expression des normes $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ et $\|u\|_\infty$.
2. Justifier (sans calcul) que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
3. Déterminer les constantes α , β et γ optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_1.$$

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad N_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1 + x_2| + |x_1| \qquad (x_1, x_2) \longmapsto \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) .$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1 , et par rapport à N_2 .

Exercice 3. On définit l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, N(u) = \frac{1}{2} \max(|x + y|, |x - y|) .$$

1. (a) Montrer que l'application N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
 (b) Dessiner sa boule unité fermée.
2. Pour $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^2 , on note $S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ la sphère unité de \mathbb{R}^2 de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon r .
 (a) Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\frac{u}{\|u\|} \in S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, 1) .$$

 (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et N_1 et N_2 deux normes sur \mathbb{R}^2 . Montrer que si les sphères $S_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et $S_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2}, \alpha)$ sont égales, alors il existe $k \in \mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N_1(u) = kN_2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.
 (c) En justifiant à l'aide du dessin, en déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N(u) = \beta(|x| + |y|)$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. On cherche maintenant à retrouver le résultat précédent par le calcul.
 (a) Montrer que $N(x, y) = N(y, x) = N(-x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 (b) En déduire que $N(x, y) = N(|x|, |y|)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 (c) Retrouver ainsi le résultat de la question 2c.

Exercice 4. Les applications N suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$
2. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|^2.$
3. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in [0; \frac{1}{2}]} |f(x)|.$
4. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$
5. $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^{2\pi} |f(t) \sin t| dt.$
6. $N : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$
7. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \left| \int_0^1 f(t) dt \right|.$
8. $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x| + 2|y|.$
9. $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2.$

où $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 5. Pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

1. En adaptant un peu l'exercice précédent, on sait que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\|\cdot\|_2$ définit aussi une norme sur $C([0; 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i, j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i, j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 7. Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de E . Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que B est la matrice nulle.

Exercice 9. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'applications, définies par :

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) = x\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}.$$

(avec la convention $0^x = 0$ pour tout $x > 0$).

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction constante $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$, pour les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

Exercice 10. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$.
 - (a) Pour un $n \in \mathbb{N}^*$, tracer la courbe de f_n .
 - (b) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle dans (E, N) .
 - (c) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
 - (d) Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 11. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k |a_k| \quad \text{et} \quad N'(P) = \max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} |a_k|.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E .
On admet que N' définit une norme sur E .
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour N .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = 1 + X + \dots + X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour N' .