Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2012-2013

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices n° 1

Sommes et produits

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère $P(x) = x^3 + x^2 + 18$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $ax^2 + bx + c \geq 5$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq -\frac{1}{3}$, on a $P(x) > 13$.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 21x - 36$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 4$, on a $f(x) \leq x^3(3x-8)$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \geq 4$, $f(x) \leq 3x^4$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{21/8}$, $f(x) \leq 3x^4 - 3x^2 - 36$
   (b) En déduire que, pour tout $x \geq \sqrt{21/8}$, $f(x) \leq 3x^4$.

Exercice 3.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $x^6 - 6x^3 + 10 \neq 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x,

$$\frac{-x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^6 - 6x^3 + 10} \geq -1 + \frac{6}{x^6 - 6x^3 + 10} .$$

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$.
   Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 0$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x$.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{i \in [\![1, 2n]\!] \\ i \text{ impair}}} i$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(\{i,j\}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \max(\{i,j\}) .$$

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^\star)^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2 .$$

Indication : commencer par étudier le cas $n = 2$.

Exercice 7.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $(x - y) \times \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$. En déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i$.
2. Soit a et b deux nombres réels.
   (a) On suppose a et b strictement positifs et qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
   (b) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
   (c) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ impair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
3. Soit $L \in \mathbf{R}_+$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $|a| \leq L$ et $|b| \leq L$. Montrer que $|a^3 - b^3| \leq 3L^2|a - b|$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Montrer que $|a^4 - b^4| \geq 4|a - b|$.

Exercice 8.

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. Simplifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. En déduire la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, \cdots, f_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(g_0, \cdots, g_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} f_i\ (g_{i+1} - g_i) \ = \ - \ \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i-1})\ g_i \ + \ (f_n\, g_{n+1} - f_0\, g_0)\ .$$
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.
   (a) Montrer que
   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \ \geq \ 0\ .$$
   (b) À quelle condition la somme précédente est-elle nulle ?

Exercice 10.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
2. Résoudre en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ l'équation $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer à quelles conditions $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$.

Indication : écrire les expressions précédentes comme des sommes ou différences de carrés.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in [0, 1]^n$. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \ \geq \ 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in [1, \infty[^n$.
   Montrer que si $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 1$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}^-$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\prod_{i=1}^{n} x_i = x$.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq 0$.
3. Soit $x \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\prod_{i=1}^{n} x_i = x$.
   Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \leq x^{\frac{1}{n}}$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Montrer que
   $$\left| \prod_{i=1}^{n} x_i \right| \ \geq \ \left(\min_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \right)^n \ .$$
   En déduire que, si $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i = 0$.

Exercice 13. Dans cet exercice, on acceptera comme démonstration même des esquisses d'arguments combinatoires.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [\![0, n]\!]$ et E un ensemble à n éléments.

   (a) On rappelle qu'un *arrangement* de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E. Calculer A_n^p, le nombre d'arrangements de p éléments de E.

   (b) Une *permutation* de E est un arrangement de n éléments de E. Déduire A_n^n, le nombre de permutations de E, de la question précédente.

   (c) Vérifier l'égalité $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et en donner une interprétation combinatoire. On notera que l'on retrouve bien $\mathrm{A}_n^0 = 1$.

   (d) On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments de E. Démontrer que

   $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

   puis calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{0}{0}$.

2. (a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

   (b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$,

   $$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\ .$$

   (b) Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Calculer le nombre de parties de E.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.