Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoire, 1ère année, 2ème semestre : Analyse

Feuille d'exercices n° 1

FONCTIONS USUELLES

---

1 Quelques fonctions classiques

Exercice 1.1.

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 1.2.

1. Etudier et tracer le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$.
2. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 1.3.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un unique x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Déduire de la question précédente les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
4. Déterminer l'asymptote au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Exercice 1.4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 (avec $x \neq 0$), puis étudier en quels points de $\mathbb{R}_+$ la fonction f est dérivable.
2. Etudier ses variations et tracer sommairement son graphe.

Exercice 1.5. Discuter les solutions de l'équation $\exp(-ae^{-ax}) = x$, où le paramètre a est un réel donné vérifiant $0 \leq a \leq e$.

Exercice 1.6. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$,
2. $x^{(x^{\sqrt{x}})} = (x^x)^{\sqrt{x}}$,
3. $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$,
4. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.

2 Trigonométrie et trigonométrie hyperbolique

Exercice 1.7. Soit θ un réel. En utilisant l'exponentielle complexe, retrouver les formules permettant de calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, ainsi que celles exprimant $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 1.8. Linéariser l'expression $\cos^5(\theta)$, puis $\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)$.

Exercice 1.9. Soit $n \geq 1$ un entier et θ un réel.

1. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \binom{n}{1}\cos(\theta) + \binom{n}{2}\cos(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\cos(n\theta) \\ B_n &= \binom{n}{1}\sin(\theta) + \binom{n}{2}\sin(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\sin(n\theta). \end{aligned}$$

2. Calculer les expressions suivantes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\ \theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\ \theta).$$

Exercice 1.10. Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

1. $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(y) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{ch}^2(y) = \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)$,
2. $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
3. $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y) = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)$,
4. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.

Exercice 1.11. Résoudre le système : $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 3 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2 \end{array} \right.$

Exercice 1.12. Calculer $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\operatorname{ch}(5x).$$

Exercice 1.13. Résoudre l'équation différentielle $y'\operatorname{ch}(t) + y\operatorname{sh}(t) = 0$, dans laquelle l'inconnue est la fonction y, fonction dérivable d'une variable réelle notée t.

Exercice 1.14.

Soit u un réel. Exprimer $\operatorname{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u.

Même question avec $\operatorname{sh}^4(u)$.