

Feuille d'exercices n° 1

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Normes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, rappeler l'expression des normes $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ et $\|u\|_\infty$.
2. Justifier (sans calcul) que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
3. Déterminer les constantes α , β et γ optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_1.$$

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad N_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto |x_1 + x_2| + |x_1| \quad (x_1, x_2) \mapsto \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|).$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer les boules unités fermées centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ pour ces deux normes.

Exercice 3. Les fonctions N suivantes sont-elles des normes sur les espaces considérés ?

- | | |
|---|---|
| 1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \sup\{ f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$ | 5. $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt$ |
| 2. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \sup\{ f(x) ^2; x \in [0; 1]\}$ | 6. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \left \int_0^1 f(t) dt \right $ |
| 3. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \sup\{ f(x) ; x \in [0; 1/2]\}$ | 7. $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x + 2 y $ |
| 4. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \sup\{ f(x) ; x \in [0; 1]\}$ | 8. $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{ x } + \sqrt{ y } \right)^2$. |

Exercice 4. On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$. On définit deux applications sur E par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que N définit une norme sur E . On admet que N_∞ définit aussi une norme sur E .
2. Montrer que : $\forall u \in E, N(u) \leq 2N_\infty(u)$. Déterminer une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $u^{(p)}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(p)} = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer, à l'aide des suites $u^{(p)}$ par exemple, que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad P_n = e^{\frac{1}{n}} + \frac{\cos(n)}{n^2 + 3} X^2 - 2 \frac{\ln(n)}{\ln(n) + \sqrt{\ln(n)}} X^3.$$

Exercice 7. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} , on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'applications, définies par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f_n(x) = x \sqrt{\frac{n}{n^2 + 1}}.$$

(avec la convention $0^x = 0$ pour tout $x > 0$).

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction constante $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$, pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}.$$

- (a) Pour un $n \in \mathbb{N}^*$, tracer la courbe de f_n .
- (b) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle dans (E, N) .
- (c) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
- (d) Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(({}^t A)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge aussi et en déduire que B est la matrice nulle.

Exercice 10. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k |a_k| \quad \text{et} \quad N'(P) = \max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} |a_k|.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E . On admet que N' définit une norme sur E .
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour N .

3. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = 1 + X + \dots + X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour N' .

Pour s'entraîner :

Exercice 11. On définit l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(u) = \frac{1}{2} \max(|x + y|, |x - y|).$$

1. (a) Montrer que l'application N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
(b) Dessiner sa boule unité fermée.
2. Pour $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^2 , on note $S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, r)$ la sphère de \mathbb{R}^2 de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon r .
(a) Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\frac{u}{\|u\|} \in S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, 1).$$

- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et N_1 et N_2 deux normes sur \mathbb{R}^2 . Montrer que si les sphères $S_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et $S_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2}, \alpha)$ sont égales, alors il existe $k \in \mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N_1(u) = kN_2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.
 - (c) En justifiant à l'aide du dessin, en déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N(u) = \beta(|x| + |y|)$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. On cherche maintenant à retrouver le résultat précédent par le calcul.
(a) Montrer que $N(x, y) = N(y, x) = N(-x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) En déduire que $N(x, y) = N(|x|, |y|)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) Retrouver ainsi le résultat de la question 2c.

Exercice 12. Pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

Montrer que pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.