Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

Mathématiques III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 1

RÉVISIONS SUR LES COMPARAISONS LOCALES DE FONCTIONS

Exercice 1. Soit $f : x \longmapsto x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Pour les fonctions g suivantes, expliquer si l'on a ou non $f \underset{+\infty}{\sim} g$:

1. $g(x) = x^4$, 2. $g(x) = 2x^4$, 3. $g(x) = x^4 + 1$, 4. $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Exercice 2. Vrai ou faux ?

1. $x \underset{0}{\sim} 0$, 2. $x^3 \underset{+\infty}{=} o(x^3 + x^2)$, 3. $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$, 4. $1 \underset{0}{=} \cos(x) + o(x^2)$,
5. $o(f) + o(f) \underset{x_0}{=} o(f)$, 6. $o(x^2) + o(x) \underset{0}{=} o(x)$, 7. $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} o(1)$.

Exercice 3. Comparer les expressions suivantes (on étudiera si l'une est négligeable, dominée ou équivalente à l'autre et réciproquement) :

1. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0,
2. $(*)$ $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x}\,\ln(x^2) \sin(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites des expressions suivantes au point indiqué :

1. $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ en 0,
2. $\left(\dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1 - \cos(x)}\right)$ en 0,
3. $(\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sh}^2 x}$ en 0,
4. $\dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Prouver l'existence de la limite quand $x \to 0^-$ de l'expression $\dfrac{x^2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\sin\left(\tan^2 x\right) \ln(1+x)}$, et la calculer.

Exercice 6. On considère la fonction $f : \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + 2x} - \cos x - \sin x$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x)$.
2. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 7. Soit λ un réel. On considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = x^\lambda \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - 1\right)$.

1. Déterminer des équivalents simples de $f_\lambda(x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
2. Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle prolongeable par continuité (à droite) en 0 ?
3. Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle dérivable (à droite) en 0 ?

Pour aller plus loin ou plus théorique :

Exercice 8. Soient f, g et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage (éventuellement pointé) de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Démontrer les assertions suivantes :

1. si $g \underset{x_0}{=} o(h)$, alors $fg \underset{x_0}{=} o(fh)$,
2. si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{=} o(f)$, alors $h \underset{x_0}{=} o(g)$,
3. si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $g \underset{x_0}{=} \mathcal{O}(h)$, alors $f \underset{x_0}{=} o(h)$.

Pour une version moins théorique, supposer que les fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage de x_0.