Feuille d'exercices n° 1 : révisions d'algèbre linéaire

I. Espaces vectoriels – Bases

Exercice 1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G = F + G$ si et seulement si $F = G$.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 2.

1. Soient $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$. Montrer que H et D des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.
2. Soient $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \longmapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.

1. On pose $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_3 + e_1$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
2. On pose $g_1 = e_1 + e_2$, $g_2 = e_2 + e_3$, $g_3 = e_3 + e_4$ et $g_4 = e_4 + e_1$. Montrer que la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) n'est pas libre.
3. On pose $h_1 = e_1 + e_2$, $h_2 = e_2 + e_3$, $\dots$, $h_{n-1} = e_{n-1} + e_n$ et $h_n = e_n + e_1$. La famille de vecteurs $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n)$ est-elle libre ?

Exercice 5. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^5$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
2. Soit $v \in \mathbb{R}^5$. À quelle condition $v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$?
3. Trouver un supplémentaire de $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^5$.

II. Applications linéaires – Théorème du rang

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application u :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z). \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 7. Pour chacune des applications qui suit, dire (en le justifiant) si elle est linéaire ou non :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2PP' \end{array}$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.
2. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par "$f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X^4 - 5X + 2$".

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

(c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$.

3. (a) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant les propriétés du 2.

   (b) Les équivalences sont-elles encore vraies en dimension infinie ?

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^n(x_0))$ forme une base de E.

1. Montrer que u est bijective.
2. Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe un entier naturel p tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dira que u est *ponctuellement nilpotent* si, pour tout $x \in E$, il existe un entier naturel p (qui dépend de x) tel que $u^p(x) = 0_E$.

1. Démontrer que tout endomorphisme nilpotent est ponctuellement nilpotent.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si E est de dimension finie.
3. Donner un exemple d'endomorphisme ponctuellemement nilpotent non nilpotent.
4. On suppose E de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Démontrer que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Indication : soit p le plus petit entier strictement positif tel que $u^p = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ soit libre.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si la dimension de E est paire.

III. Matrices – Changements de base

Exercice 12. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP'$$

pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de u.

Exercice 13. On note $S(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = {}^tA\}$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $A(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = -{}^tA\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $S(n)$ et $A(n)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Calculer la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
3. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer la trace de ϕ.

Exercice 14. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix},$$

et soient $E = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, u(x) = 2x\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid u(x) = -2x\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et la dimension.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
3. Soit e_1 un vecteur directeur de E et (e_2, e_3) une base de F. Calculer la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 15.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont la même trace.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel k, les matrices A^k et B^k ont la même trace.

Exercice 16. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par $u(x, y, z) = (x - y, y + z, x + y + 2z, x)$.

1. Écrire la matrice A de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice M de u dans cette base. Quelle relation lie A et M ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'application :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que u_A est une application linéaire.
2. (a) En calculant $u_A(I_n)$, déterminer s'il existe des matrices A telles que l'application u_A soit injective.
   (b) Existe-il des matrices A telles que l'application u soit surjective ?
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$. Donner la matrice de u_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 19. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

IV. Inversibilité

Exercice 21. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. En déduire A^n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 23. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que A est inversible.

V. Sommes directes

Exercice 24. Trouver trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 de $\mathbb{R}^3$ (deux de dimension 1 et un de dimension 2 par exemple) tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

1. $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour $i \neq j$,
2. $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$,
3. $\mathbb{R}^3$ n'est pas la somme directe des F_i.

Exercice 25. Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soient $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_p$ des familles génératrices respectives de $F_1, \ldots, F_p$. Montrer que la réunion des $\mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$.
2. Montrer que les F_i sont en somme directe si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \ldots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est libre.
3. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \ldots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E.
4. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si $E = F_1 + \cdots + F_p$ et $\dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$.