

**Feuille d'exercices n° 1**

RÉVISIONS SUR LES COMPARAISONS LOCALES DE FONCTIONS

**Exercice 1.** Soient  $f, g$  et  $h$  des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage (éventuellement pointé) de  $x_0$  (avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  ou  $x_0$  infini). Démontrer les assertions suivantes :

1. si  $g =_{x_0} o(h)$  alors  $fg =_{x_0} o(fh)$ ,
2. si  $f \sim_{x_0} g$  et  $h =_{x_0} o(f)$ , alors  $h =_{x_0} o(g)$ ,
3. si  $f =_{x_0} o(g)$  et  $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$ , alors  $f =_{x_0} o(h)$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : x \mapsto x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$ . Pour les fonctions  $g$  suivantes, expliquer si l'on a ou non  $f \sim_{+\infty} g$  :

1.  $g(x) = x^4$ ,    2.  $g(x) = 2x^4$ ,    3.  $g(x) = x^4 + 1$ ,    4.  $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ .

**Exercice 3.** Vrai ou faux ?

1.  $x \sim_0 0$ ,
2.  $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$ ,
3.  $\sin(x) =_0 x + o(x)$ ,
4.  $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$ ,
5.  $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$ ,
6.  $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$ ,
7.  $\ln(1+x) - x =_0 o(1)$ .

**Exercice 4.** Comparer les expressions suivantes :

1.  $x \ln x$  et  $\ln(1+2x)$  au voisinage de 0,
2.  $x \ln x$  et  $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 5.** Calculer, si elles existent, les limites des expressions suivantes au point indiqué :

1.  $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$  en 0,
2.  $\left( \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} \right)$  en 0,
3.  $(\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sh}^2 x}$  en 0,
4.  $\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$  en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 6.** Prouver l'existence de la limite quand  $x \rightarrow 0^-$  de l'expression  $\frac{x^2 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\sin(\tan^2 x) \ln(1+x)}$ , et la calculer.

**Exercice 7.** On considère la fonction  $f : ]-\frac{1}{2}; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$ .

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $f(x)$ .
2. En déduire un équivalent de  $f$  au voisinage de 0.

**Exercice 8.** Soit  $\lambda$  un réel. On considère la fonction  $f_\lambda : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_\lambda(x) = x^\lambda \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$ .

1. Déterminer des équivalents simples de  $f_\lambda(x)$  au voisinage de 0 et de  $+\infty$ .
2. Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la fonction  $f_\lambda$  est-elle prolongeable par continuité (à droite) en 0 ?
3. Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la fonction  $f_\lambda$  est-elle dérivable (à droite) en 0 ?