Feuille d'exercices n° 1
Produits scalaires et inégalités de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ par :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^t\!AB).$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application χ définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ par :
$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad \chi((x,y),(x',y')) = 2xx' + 2ayy' + xy' + x'y.$$
4. On note $E = \mathcal{C}([-1;1];\mathbb{R})$ et on considère l'application définie par
$$\forall f, g \in E, \quad b(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \dots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notation.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

1. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire φ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer $\varphi(2X-1, X^2+1)$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice d'un produit scalaire sur E dans une base de E. Montrer que A est inversible.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Exercice 5. Soit $(E, \langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien. On considère une famille $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ constituée d'éléments de E de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$,
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale.
2. Soit $x \in E$, montrer que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle b_i$.
3. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 6. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel :
$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi n t)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Exercice 7. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$:

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ x_i \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. On considère l'application $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right).$$

Montrer que h admet un minimum sur D et décrire les vecteurs pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 9. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, k un réel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \langle x,y\rangle + k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 10. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe un produit scalaire hermitien sur E tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormée.

Exercice 12. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ est orthonormée.

Soient $a_0,\ldots,a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i.
4. Soit $M = \sup\{|Q(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1 \iff Q = X^n$.