Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n^o 1

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Rappel :

On parle d'intégrales impropres (ou intégrales généralisées) lorsque

1. le domaine d'intégration est non borné,
2. lorsque la fonction à intégrer n'est pas bornée sur le domaine d'intégration,
3. lorsque la fonction à intégrer n'est pas définie sur un ensemble fini de points du domaine d'intégration.

Exemples :

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $R \in [1, +\infty[$. Si $\lim_{R\to+\infty} \int_1^R f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre de f sur $[1, +\infty[$ existe et on pose $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\varepsilon > 0$. Si $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre de f sur $[0, 1]$ existe et on pose $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1. Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et calculer leur valeur :

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, discuter du résultat en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, et soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Supposons que $|g| \le f$. Alors, si l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ existe également.

Exercice 3. Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent :

1. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,
3. $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour $a > 0$, et calculer $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$,

Exercice 4. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalence suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \text{existe} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Exercice 5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t-\sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ existe.

Exercice 6. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$,
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Montrer que les intégrales impropres suivantes existent :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (Intégrale de Fresnel)

Exercice 8. Démontrer l'énoncé suivant (Critère de Cauchy) :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 1$ tel que pour tout $a, b > R$ on a

$$\Big| \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^b f(x)\,dx \Big| = \Big| \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \Big| < \varepsilon.$$